# Semejanza de Triángulos

Liceo Javiera Carrera

Departamento de Matemática

Asignatura - Matemática

Matemática Común

# Semejanza

- En esta presentación encontrarás :

Descripción del concepto de semejanza y ejemplos

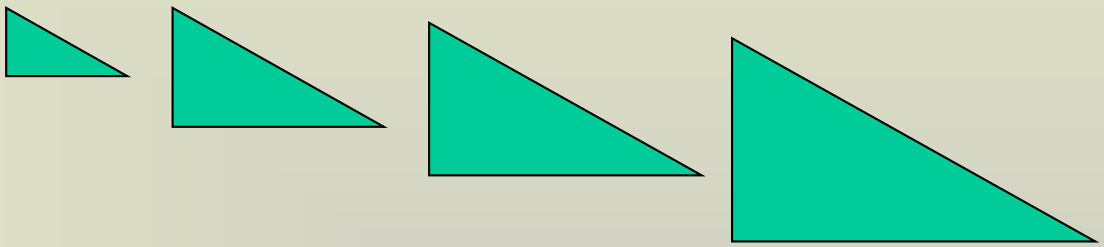
Definición y ejemplos del concepto de semejanza

Criterios de semejanza de triángulos y ejemplos

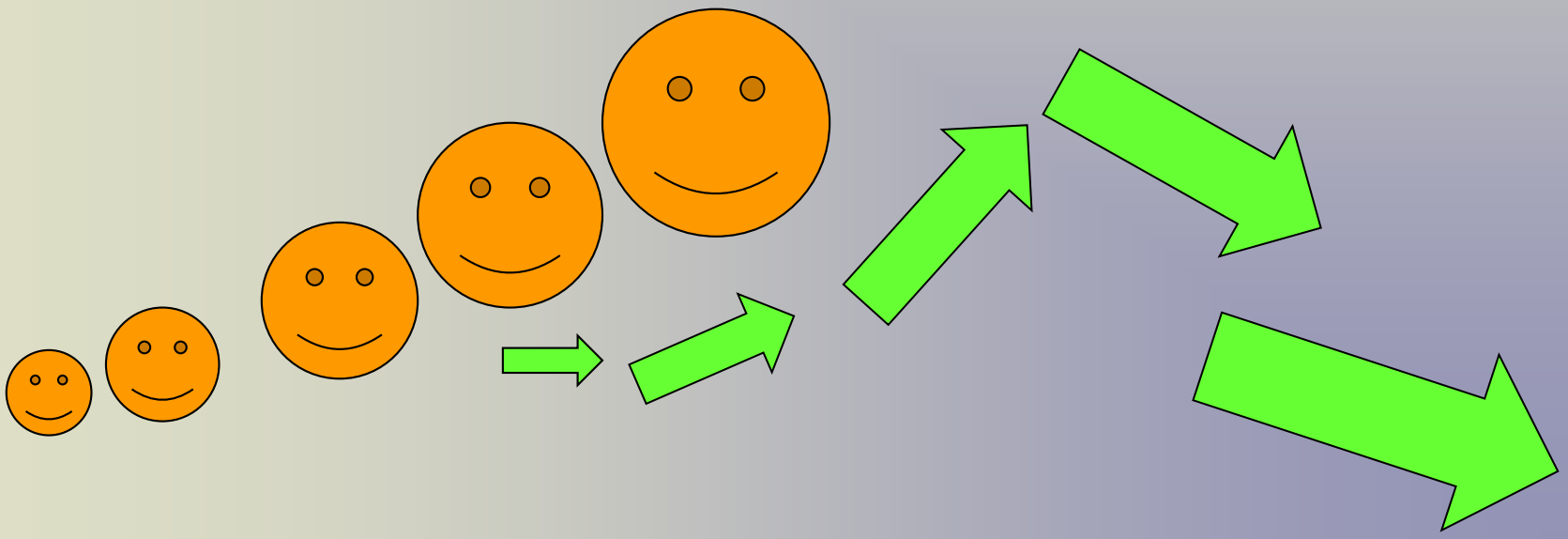
Una sencilla demostración

Algunos ejercicios sencillos

Todos estos elementos son la base de los contenidos relacionados con la unidad de **semejanza**

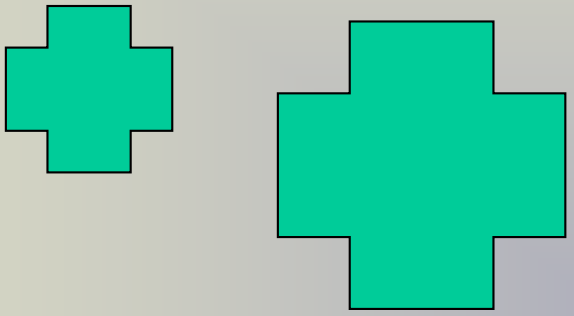


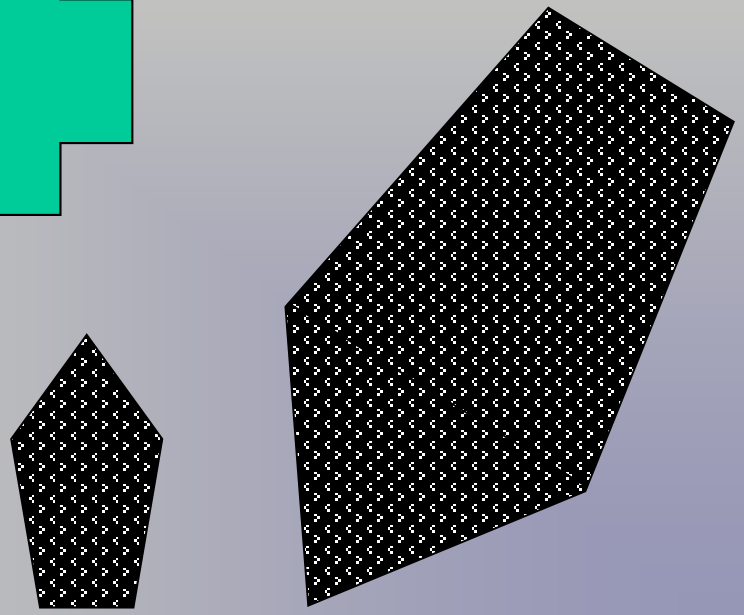
# Semejanza



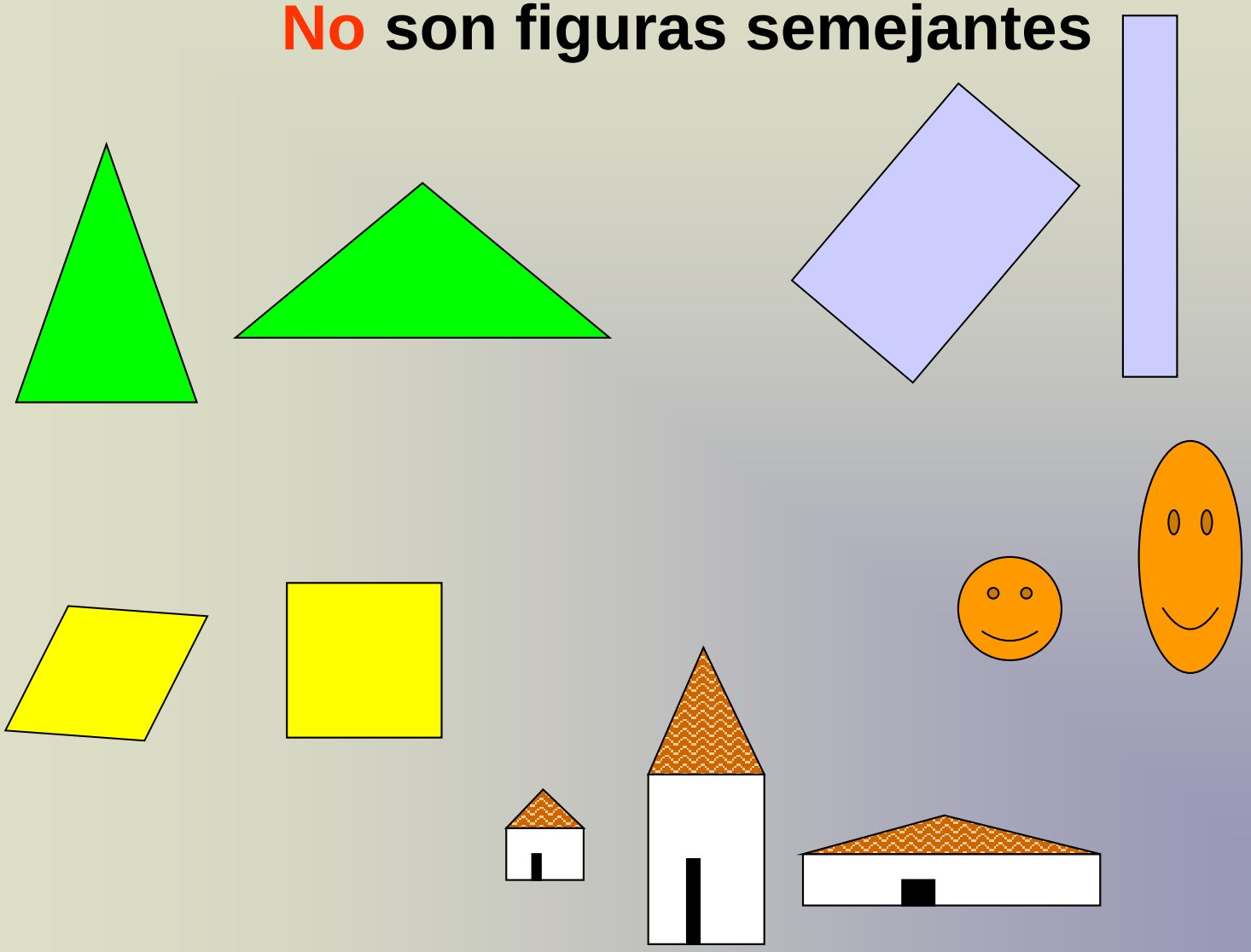
**Descripción: Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma "forma", pero no necesariamente el mismo tamaño**

## Ejemplos de figuras semejantes



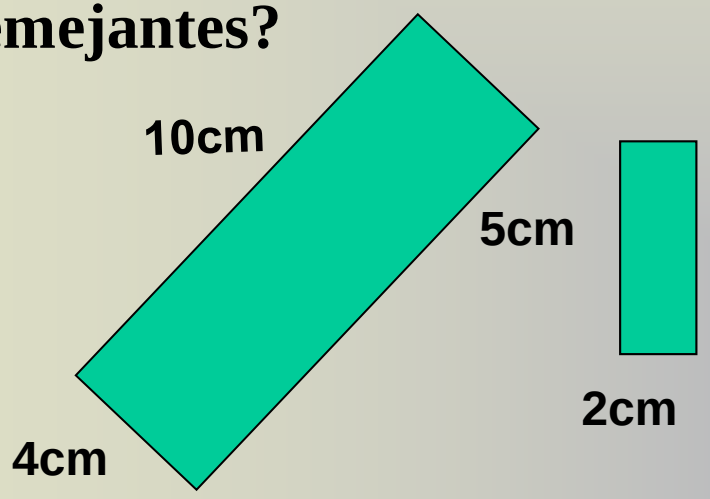


# No son figuras semejantes



**Definición geométrica:** **Dos figuras son semejantes cuando la razón entre las medidas de sus lados homólogos (correspondientes) es constante, es decir son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes**

**Ejemplo: ¿Los siguientes rectángulos son semejantes?**




**¿Tienen sus lados respectivos proporcionales?**

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$$

Así es, ya que los productos "cruzados" son iguales
10 •2 = 5 • 4

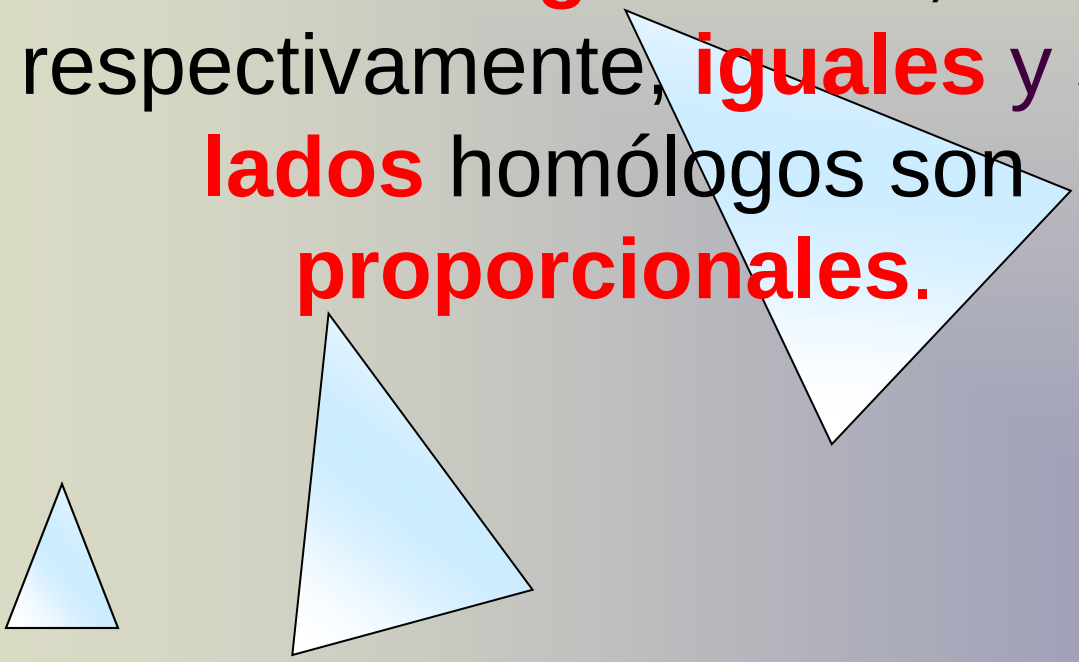
**¿Son sus ángulos correspondientes congruentes?**

Efectivamente, al tratarse de dos rectángulos, todos los ángulos miden 90º y se cumple que los ángulos correspondientes son congruentes

**Al cumplirse las dos condiciones anteriores, podemos decir que los dos rectángulos son semejantes**

# Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus **ángulos** son, respectivamente, **iguales** y sus **lados** homólogos son **proporcionales**.



# Criterios de semejanza de triángulos

existen algunos principios que nos permiten determinar si dos triángulos son semejantes sin necesidad de medir y comparar todos sus lados y todos sus ángulos. Estos principios se conocen con el nombre de criterios de semejanza de triángulos

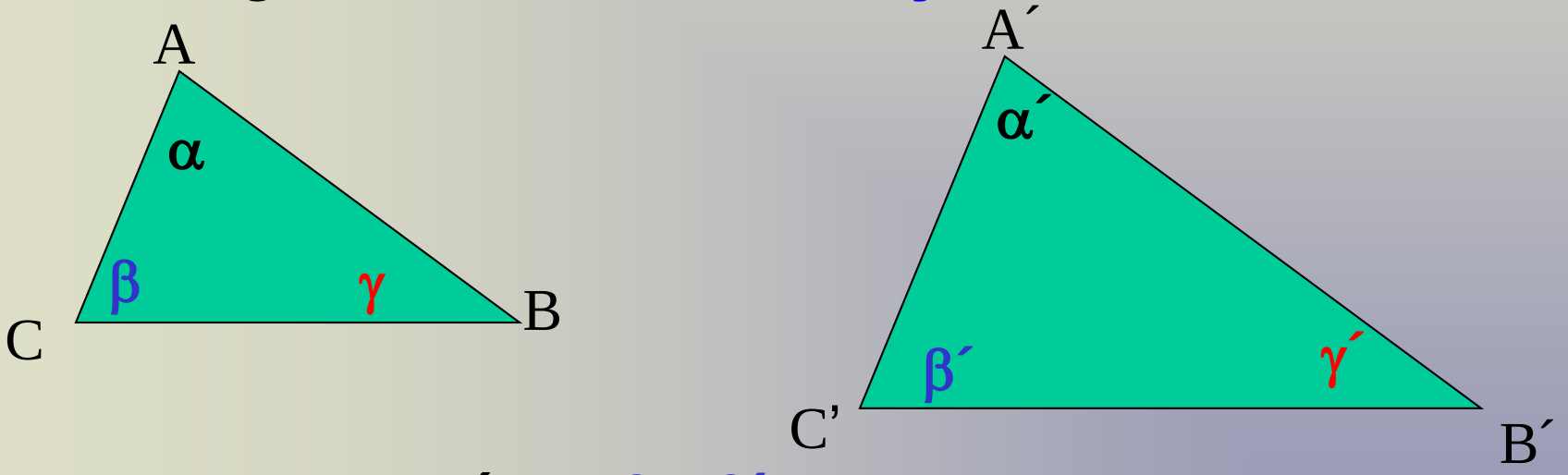
# Existen tres criterios de semejanza de triángulos

1. AA ( ángulo-ángulo)
2. LLL (lado-lado-lado)
3. LAL (lado-ángulo-lado)

# I. Primer criterio

# AA

Dos triángulos que tienen los dos **ángulos** congruentes son **semejantes** entre sí.

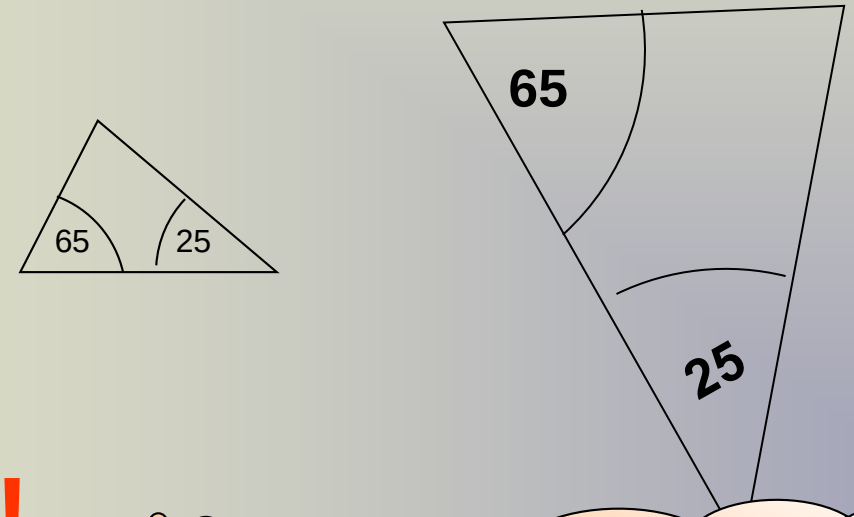



**Es decir:** Si $\alpha = \alpha'$ , $\beta = \beta'$ de lo anterior se deduce que $\gamma = \gamma'$

Entonces, **Δ ABC semejante con ΔA´B´C´**

# Ejemplo

**¿Son los siguientes triángulos semejantes?**



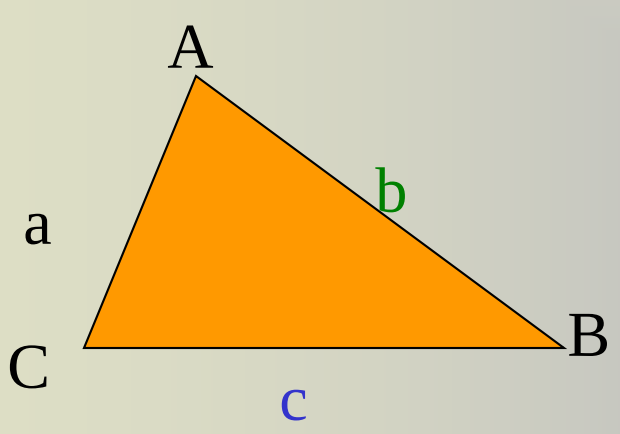

**¡SI!**

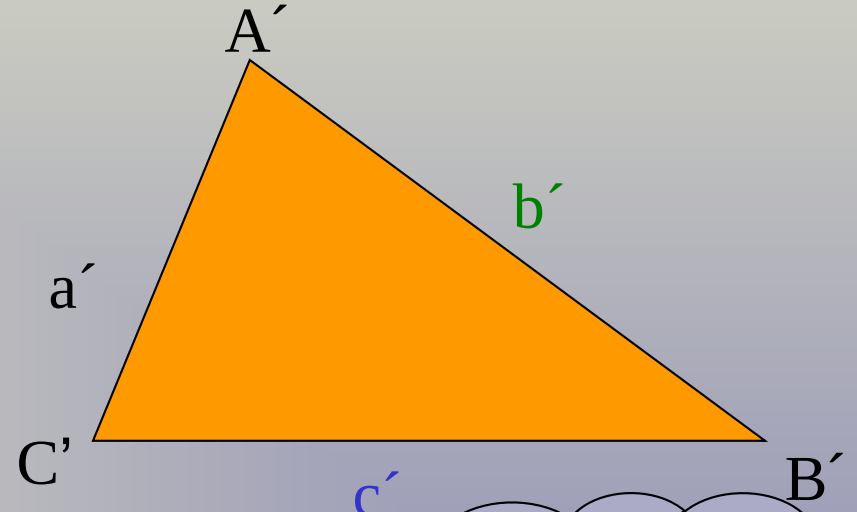
Por que al tener dos de sus ángulos congruentes, cumplen con el criterio **AA**

# II. Segundo criterio

# LLL

Dos triángulos que tienen **los tres lados proporcionales** son **semejantes** entre sí.




Es decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$$

Entonces, **Δ ABC semejante con ΔA´B´C´**

El cociente obtenido de comparar los lados homólogos entre sí recibe el nombre de **razón de semejanza**.

# Ejemplo

**Determine si los triángulos ABC y PQR son semejantes**

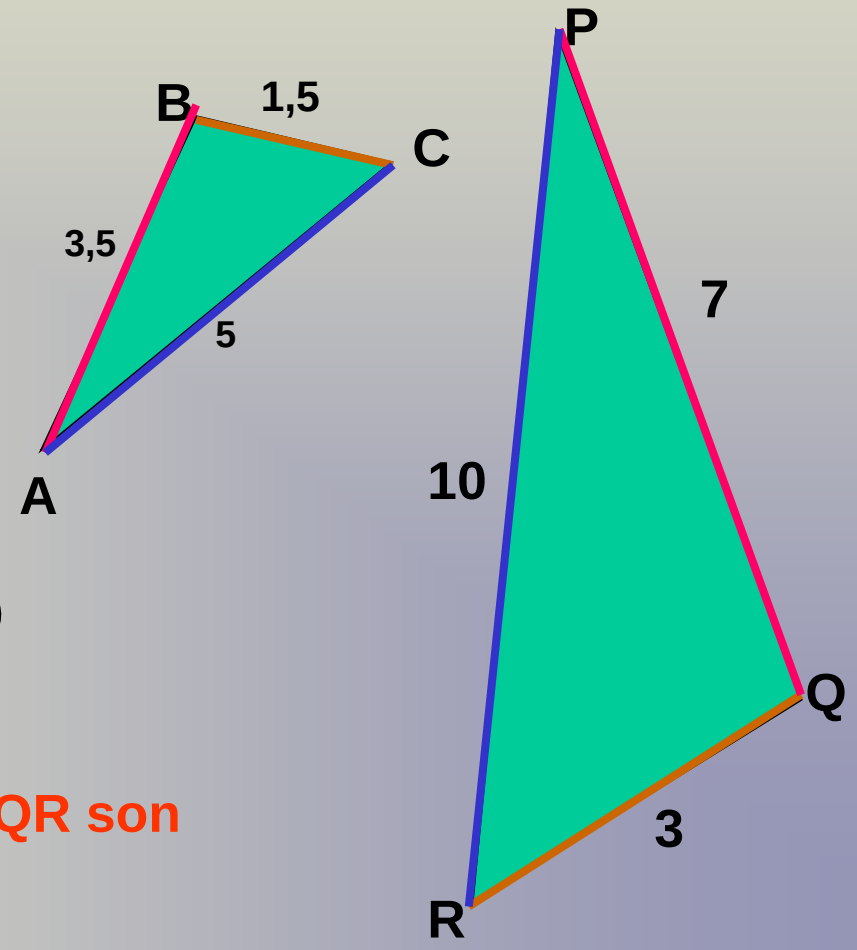
Verifiquemos si las medidas de los lados son proporcionales

$$\frac{1,5}{3} = \frac{3,5}{7} = \frac{5}{10}$$

**Efectivamente , así es, ya que los productos "cruzados" son iguales**

**1,5 • 7 = 3 • 3,5 = 10,5**

**3,5 • 10 = 7 • 5 = 35**

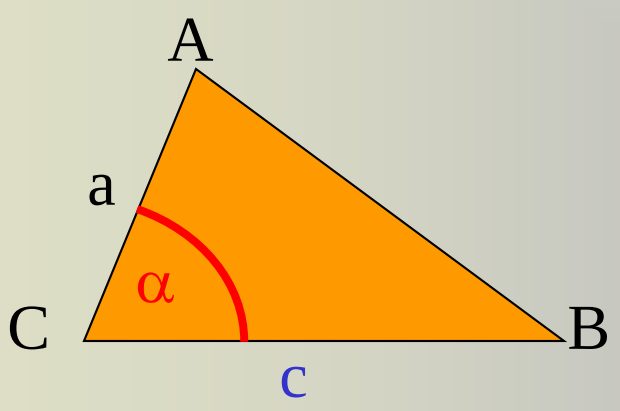


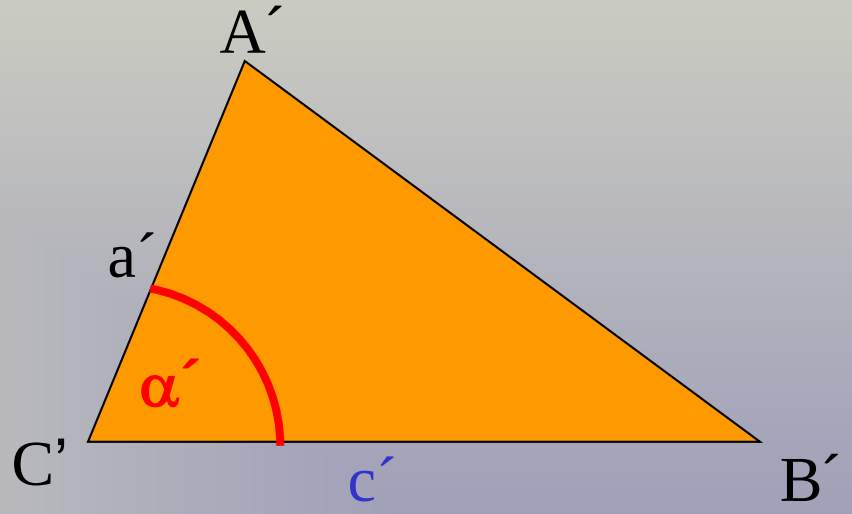

**Por lo tanto Triángulos ABC y PQR son semejantes por criterio LLL**

# III. Tercer criterio

# LAL

Dos triángulos que tienen **dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual**, son **semejantes** entre sí.




Es decir:

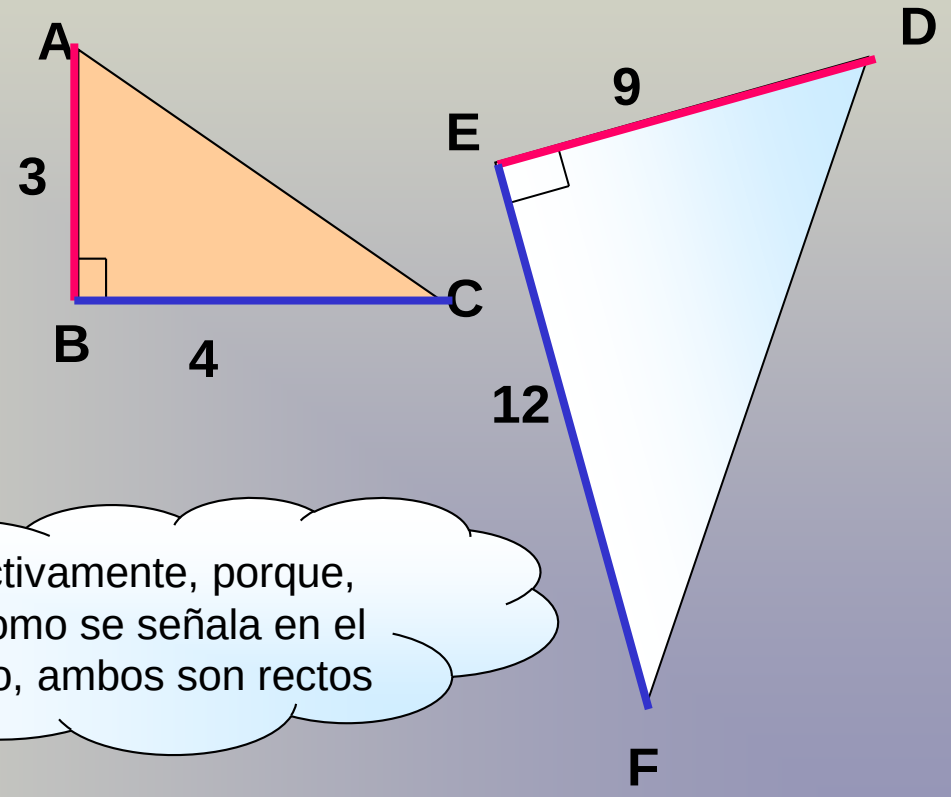
$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha'$$

Entonces **Δ ABC semejante a Δ A´B´C´**

# Ejemplo

## ¿Son los triángulos ABC y DEF semejantes?

Veamos si dos de sus lados son proporcionales




$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

Efectivamente así es, ya que los productos "cruzados" son iguales
3 • 12 = 4 • 9

¿Los ángulos formados por estos dos lados son congruentes?

Efectivamente, porque, tal como se señala en el dibujo, ambos son rectos

**Por criterio LAL Triángulos ABC y DEF son SEMEJANTES**

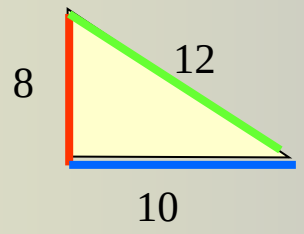
# Algunas aplicaciones de estos conceptos

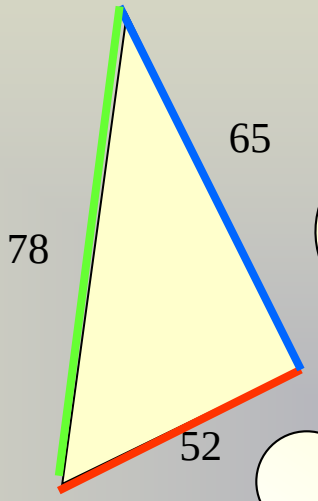
# Ejercicio

**Conocemos las dimensiones de los lados de dos triángulos. Comprueba que son semejantes y halla la razón de semejanza.**

**a) 8 cm, 10 cm, 12 cm**
**b) 52 cm, 65 cm, 78 cm**

**Representemos el ejercicio**




Efectivamente, al calcular los productos "cruzados", podemos ver la proporcionalidad entre las medidas de los lados respectivos

52 •10 = 8 • 65 = 520
65 • 12 = 10 •78 = 780

**Comprobemos que las medidas de los lados homólogos son proporcionales**

$$\frac{52}{8} = \frac{65}{10} = \frac{78}{12} = 6{,}5$$

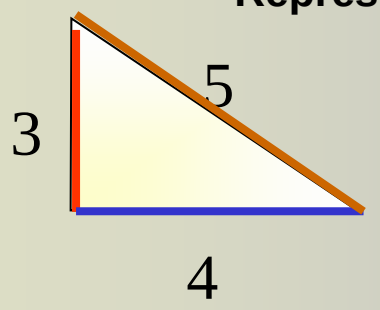
Para calcular la razón de semejanza se calcula una de las razones
65 : 10 = 6,5

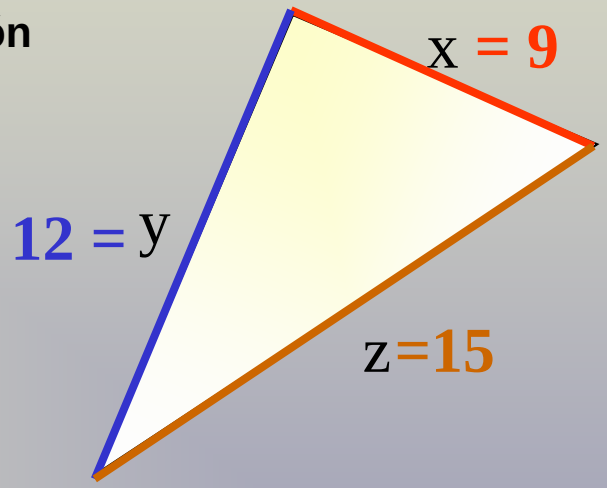
Entonces los triángulos son **semejantes por criterio LLL**

# Ejercicio

**Tenemos un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm respectivamente y deseamos hacer una ampliación a escala 3:1. ¿Cuánto medirá cada lado?.¿Cuál es la razón de semejanza?.**

**Representamos la situación**




## Luego, debe ocurrir:

$$\frac{X}{3} = \frac{Y}{4} = \frac{Z}{5} = \frac{3}{1} = 3$$

Escala de ampliación

La razón de semejanza es 3

Entonces:

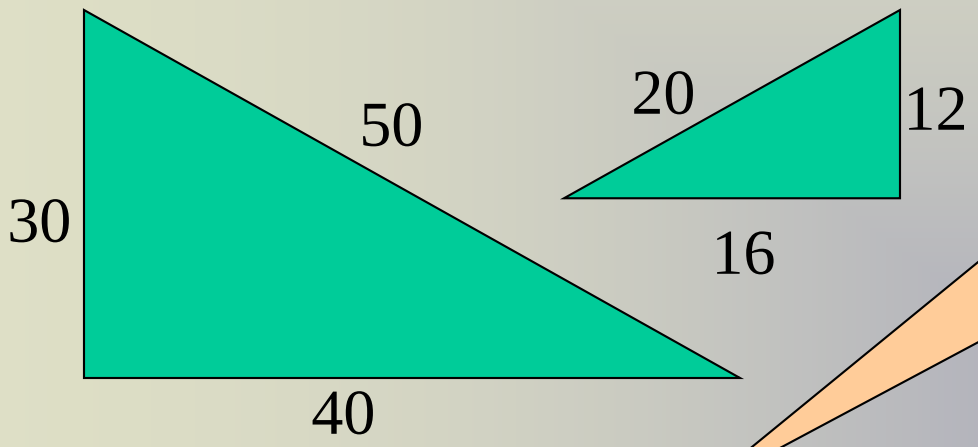
$\frac{X}{3} = 3 \Rightarrow X = 3 \cdot 3 = 9$

$\frac{Y}{4} = 3 \Rightarrow Y = 4 \cdot 3 = 12$

$\frac{Z}{5} = 3 \Rightarrow Z = 5 \cdot 3 = 15$

# Otro ejercicio similar

**Los lados de un triángulo miden 30, 40 y 50 centímetros respectivamente. Los lados de un segundo triángulo miden 12, 16 y 20 centímetros. ¿Son semejantes?. En caso afirmativo, ¿cual es la razón de semejanza?.**




Para comprobar la proporcionalidad podemos efectuar los productos "cruzados"
30x16=480 y 40x12=480
además
40x20=800 y 16x50=800

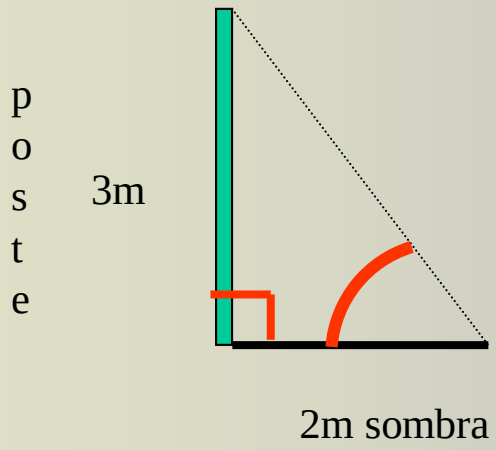
**Comprobemos que las medidas de los lados homólogos son proporcionales**

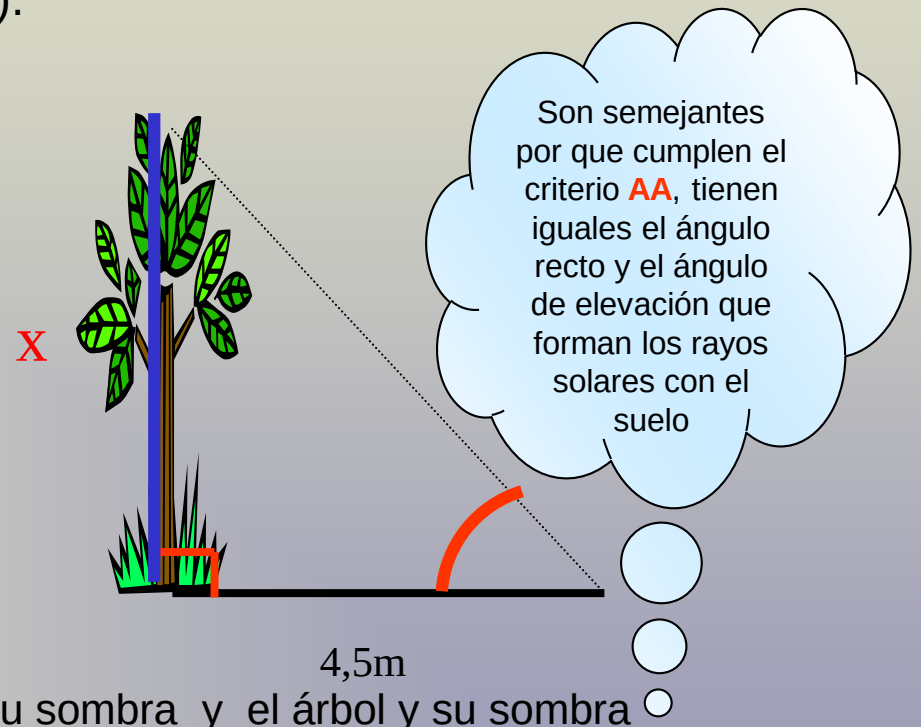
$$\frac{30}{12} = \frac{40}{16} = \frac{50}{20}$$

Para calcular la razón de semejanza se calcula una de las razones
50 : 20 = 2,5

# Una aplicación

Un poste vertical de 3 metros proyecta una sombra de 2 metros; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 metros?(Haz un dibujo del problema).




Los triángulos definidos por el poste y su sombra y el árbol y su sombra son semejantes, por lo tanto

Formamos la proporción

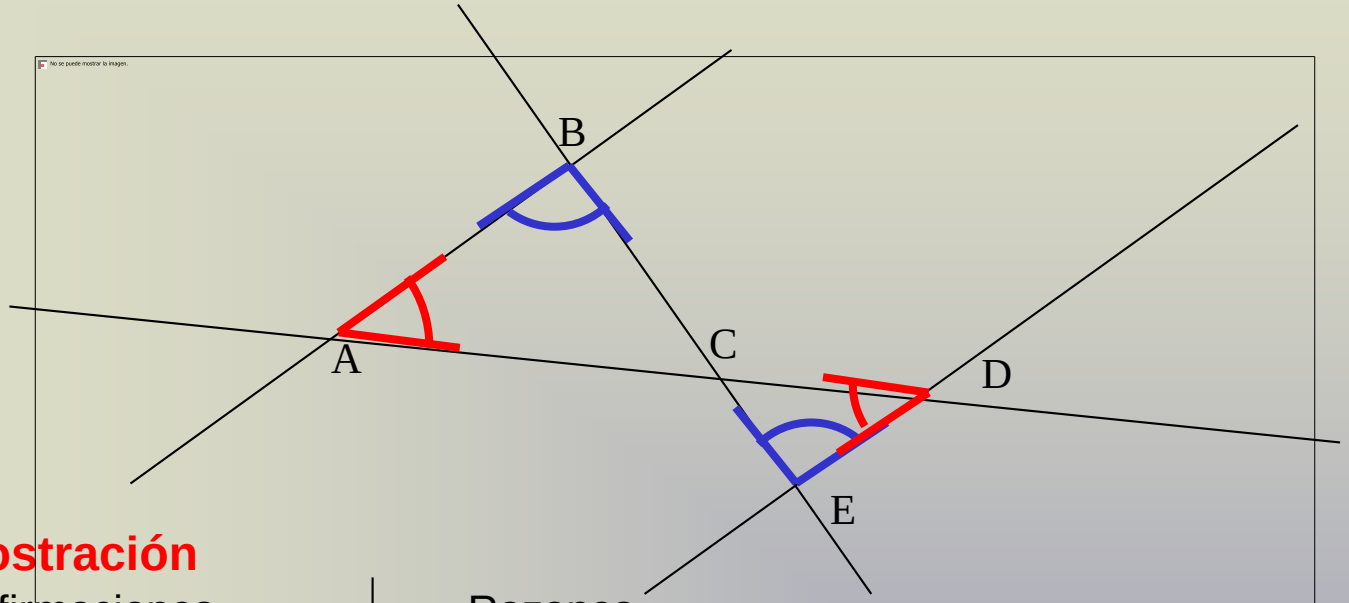
$$\frac{3}{x} = \frac{2}{4,5}$$

**De donde**

$$X = \frac{3 \cdot 4,5}{2} = 6,75\text{m}$$

# Para terminar una pequeña demostración

Demuestre: Si $L_1 // L_2$ , entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$




**Demostración**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $\angle ABC \cong \angle CDE$ | Por ser ángulos alternos internos entre // |
| $\angle BAC \cong \angle CDE$ | Por ser Ángulos alternos internos entre // |

Por lo tanto al tener dos ángulos congruentes, se cumple al criterio **AA, luego, los triángulos ABC y DEC son semejantes**