Álgebra y Funciones

Productos Notables

Matemática

Primero Medio

Prof. Angel Oteiza Soto

Objetivo de Aprendizaje

OA 3. Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica:

- Transformando productos en sumas y viceversa
- Aplicándolos a situaciones concretas
- Completando el cuadrado del binomio
- Utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas

Recordamos

Expresiones algebraicas

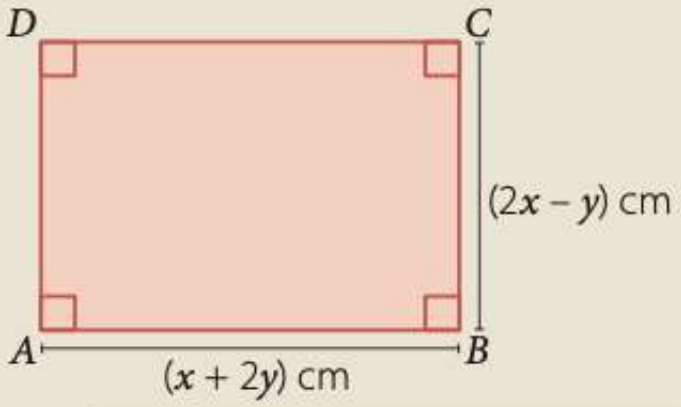
1. Reduce cada expresión algebraica. (2 puntos cada uno)

a. $a + b - 3a + b =$

b. $2(z - x) + z(x - 2) =$

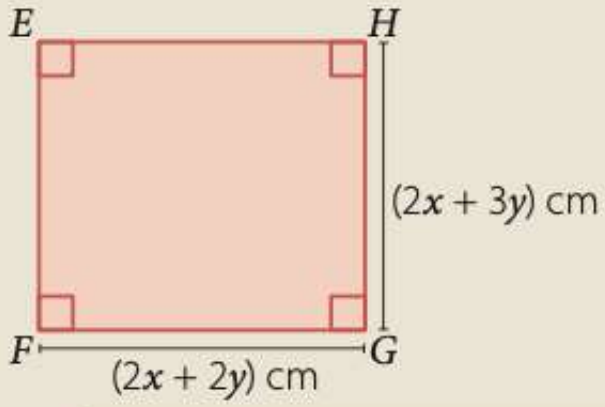
2. Calcula el área (A) en cada caso. (3 puntos cada uno)

a.



$A =$

b.



$A =$

Ecuaciones

3. Resuelve las siguientes ecuaciones. (1 punto cada uno)

a. $0{,}5x - 2{,}4 = 1{,}6$

b. $\frac{3}{5}z + 1{,}2 = z$

c. $0{,}\overline{5}x - 0{,}2\overline{1} = 0{,}\overline{2}x$

d. $\frac{1}{4}(4y - 2{,}1) = \frac{3}{4}y$

e. $1{,}\overline{2}(y - 9) = 0{,}\overline{2}y$

f. $1\frac{2}{5}(z - 0{,}\overline{3}) = 1\frac{2}{5}(0{,}\overline{3} - z)$

4. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

a. En un triángulo equilátero cada uno de sus lados mide $0{,}5x$ cm. Si su perímetro es de 9 cm, ¿cuál es el valor de x?

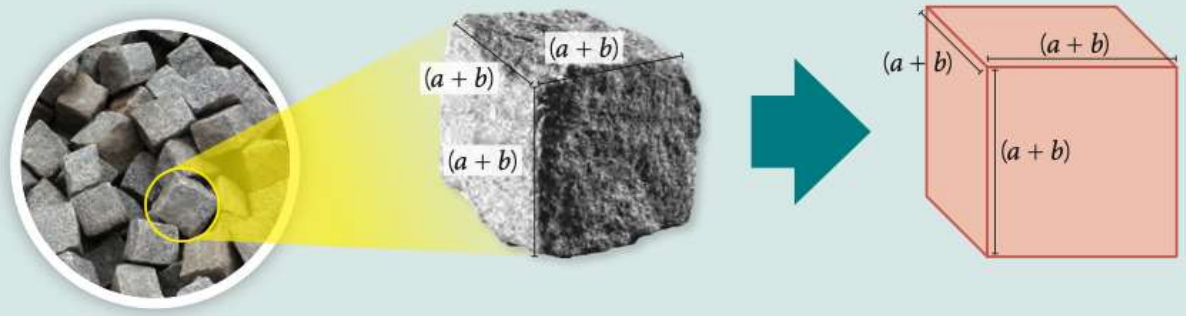
b. La edad de Inés, en años, es la quinta parte de la de su abuelo, y la suma de sus edades es de 84 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Productos Notables

Recuerdo lo que sé

1. Interpreta la siguiente información y responde.

Te has dado cuenta que existen situaciones de la vida real que se relacionan con cuerpos geométricos, en particular una piedra como se muestra a continuación.



a. Considerando que la medida de una de sus aristas es $(a + b)$ cm, completa la siguiente tabla y luego responde.

a	b	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
3	2				
1	5				

b. Explica la relación entre los valores obtenidos anteriormente.

_____

_____

c. La expresión algebraica, $a^2 + ab + b^2 + ab$, ¿la puedes reducir? ¿Con qué expresión de la tabla la relacionas? Explica.

Explicación ▸ _____

_____

_____

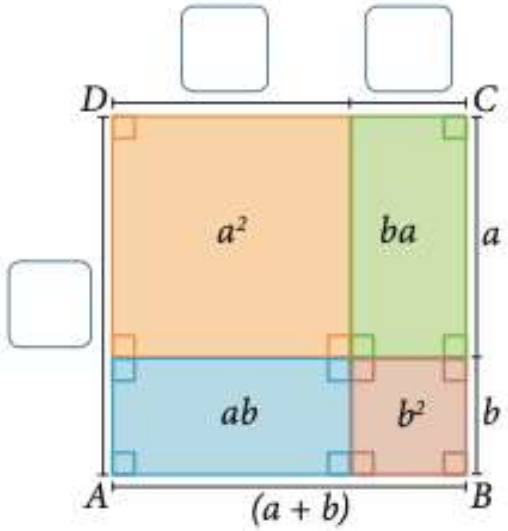
_____

Para **reducir** expresiones algebraicas se asocian los términos semejantes, es decir, se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Para **multiplicar** un polinomio por un polinomio puedes aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación y luego reducir términos semejantes.

El área de un cuadrado de lado igual a x se calcula utilizando la expresión x^2. En la figura se muestra un cuadrado cuyo lado mide $(a + b)$.

- Anota las medidas que faltan en el cuadrado $ABCD$ y luego completa el cálculo del área.



$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Propiedad distributiva.

$$= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$$

Multiplicas.

$$= a^2 + \square + ba + \square$$

Propiedad conmutativa.

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Área cuadrado $ABCD$.

- Lo que resolviste anteriormente corresponde al cuadrado de un binomio y en este caso coincide con el área del cuadrado $ABCD$.

1. Cuadrado y cubo de Binomio

Definición

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1

Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

PASO A PASO

Cuadrado del primer término. Doble del producto de los términos. Cuadrado del segundo término.

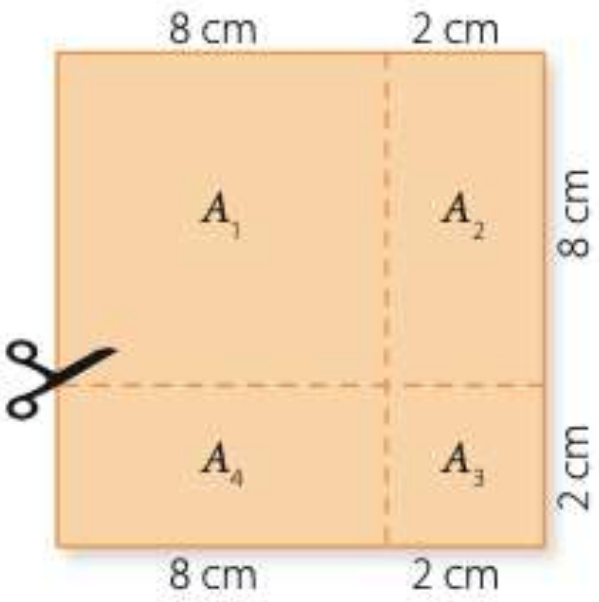
1 $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2$ → Aplicas la definición.

2 $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2$ → Aplicas propiedades de las potencias.

3 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ → Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

Utiliza un trozo de papel cuadrado de 10 cm, recórtalo como se muestra en la imagen. Calcula el área del cuadrado y cada una de las áreas que lo componen, ¿qué relación tiene lo anterior con los productos notables? Justifica tu afirmación.



Actividad

Ejemplo 2

Ejemplo 2

En la siguiente igualdad, ¿qué número debe ir en cada recuadro?

$$(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{} + \boxed{}$$

PASO A PASO

1. En el lado izquierdo de la igualdad el primer término es $5x$ y el segundo término, $2y$.

2. El número que debe ir en el primer recuadro será: "el doble del producto del primer por el segundo término", es decir, $2 \cdot 5x \cdot 2y = 20xy$. El número que debe ir en el segundo recuadro será: "el cuadrado del segundo término", es decir, $(2y)^2 = 4y^2$.

3. Finalmente, se obtiene que: $(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{20xy} + \boxed{4y^2}$

Conceptos

El **cubo de un binomio** corresponde a la multiplicación de un binomio por sí mismo tres veces, y se representa como: $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^3$. Se tienen los siguientes casos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

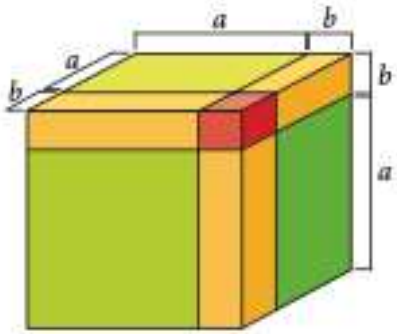
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Definición

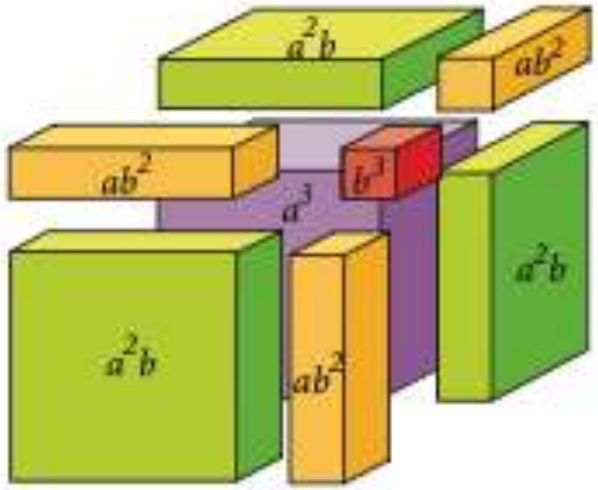
Observación

Atención

Puedes representar gráficamente un producto notable a partir de un cubo de arista $(a + b)$.



Al descomponerlo en cubos y prismas más pequeños, se obtienen los siguientes cuerpos con sus respectivos volúmenes:



Al sumar los volúmenes de cada cuerpo se obtiene el volumen del cubo original.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= (a + b)^3$$

Ejemplo 3:

Ejemplo 3

¿Qué expresión resulta al resolver $(4x - 5)^3$?

PASO A PASO

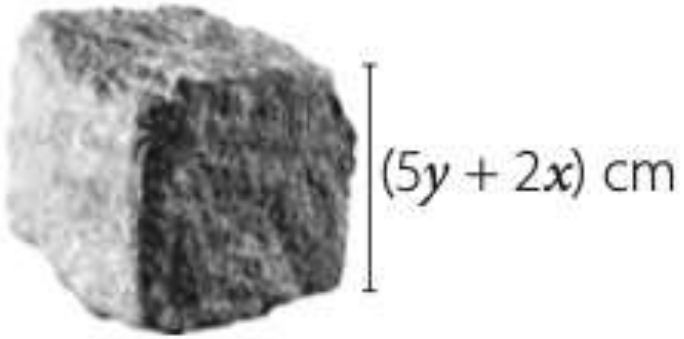
1. $(4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3$ ⟶ Utilizas el desarrollo del cubo de un binomio.
2. $64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 25 - 125$ ⟶ Calculas el valor de las potencias.
3. $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$ ⟶ Calculas los productos.

Respuesta: La expresión que resulta es: $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$.

Ejemplo 4:

Ejemplo 4

Si la roca tiene forma de cubo, ¿cuál es su volumen?



PASO A PASO

1. La arista mide $(5y + 2x)$ cm.
2. El volumen se calcula con la expresión $(5y + 2x)^3$ cm^3.
3. $(5y + 2x)^3$ cm^3 = $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm^3.

Respuesta: El volumen es $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm^3.

Actividad

¿Cómo calcularías el resultado de $(a + b)^4$? Explica.