UNIDAD N°3: RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROFESORA CAROLINA SALORT H.
LICEO JAVIERA CARRERA

ÍTEM III

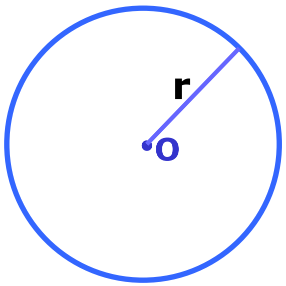
OA 4

Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas

DEFINICIÓN

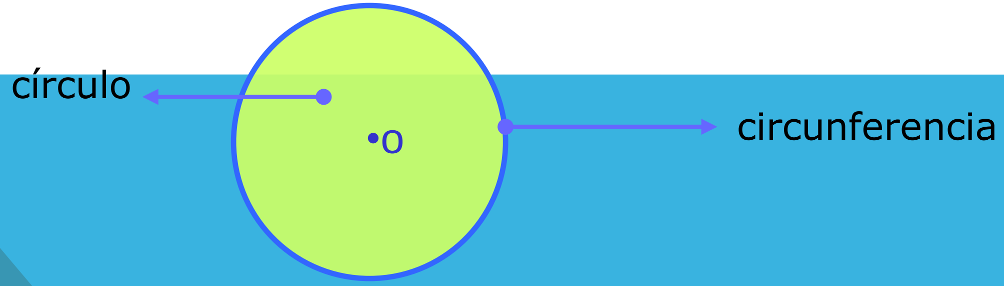
CIRCUNFERENCIA

Dado un **punto O** y una **distancia r**, se llama **circunferencia** de centro **O** y radio **r** al conjunto de todo lo puntos del plano que están a la distancia **r** del punto **O**.



CÍRCULO

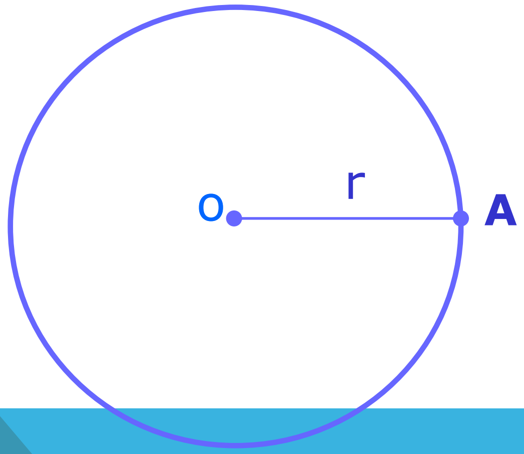
Región del plano limitado por una circunferencia



ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA Y DEL CÍRCULO

RADIO (r)

Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta ($\overline{OA}$).

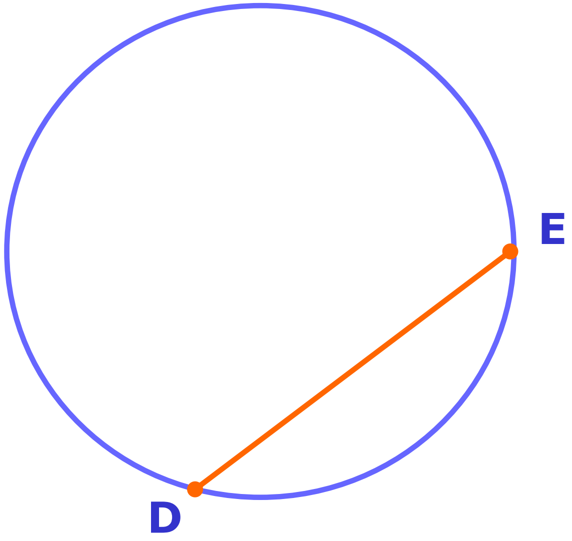


O: centro de la circunferencia

$\overline{OA}$: radio = r

CUERDA

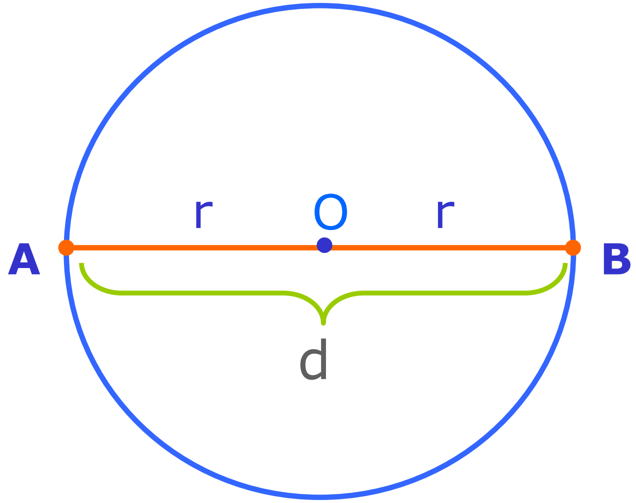
Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia ($\overline{DE}$).



$\overline{DE}$: Cuerda

DIÁMETRO (d)

Cuerda que contiene al centro de la circunferencia ($\overline{AB}$). Es la cuerda de mayor longitud.

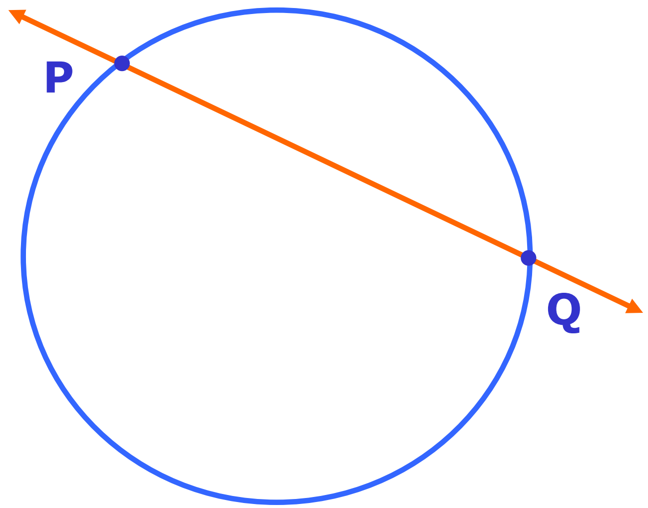


O: centro de la circunferencia

$\overline{AB}$: diámetro = **d** = **2r**

SECANTE

Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia ($\overleftrightarrow{PQ}$).

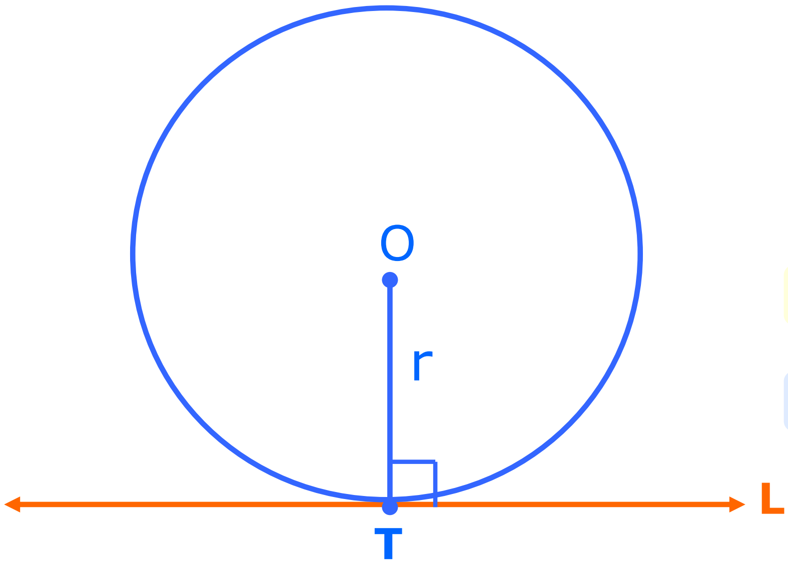


$\overline{PQ}$: Cuerda

$\overleftrightarrow{PQ}$: Secante

TANGENTE

Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto. T es llamado “**punto de tangencia**” o “**punto tangencial**”.



O: centro de la circunferencia

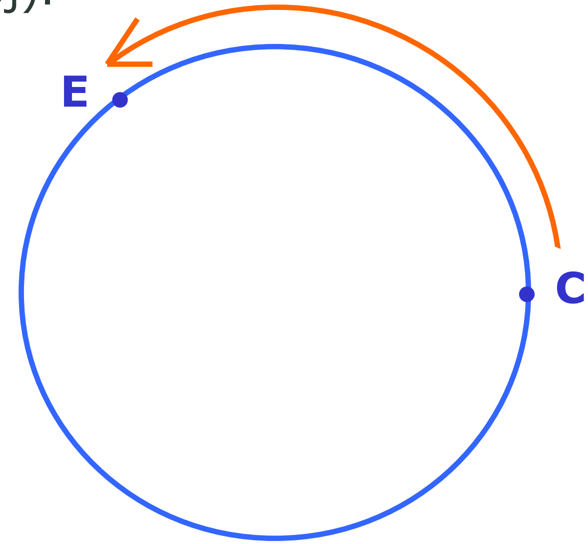
$\overline{OT}$: radio

T: Punto de tangencia

$\overline{OT} \perp L$

ARCO

Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella ($\overset{\frown}{CE}$). (Corresponde a una parte de la circunferencia.
Su lectura es en sentido anti-horario (contrario a los punteros del reloj).

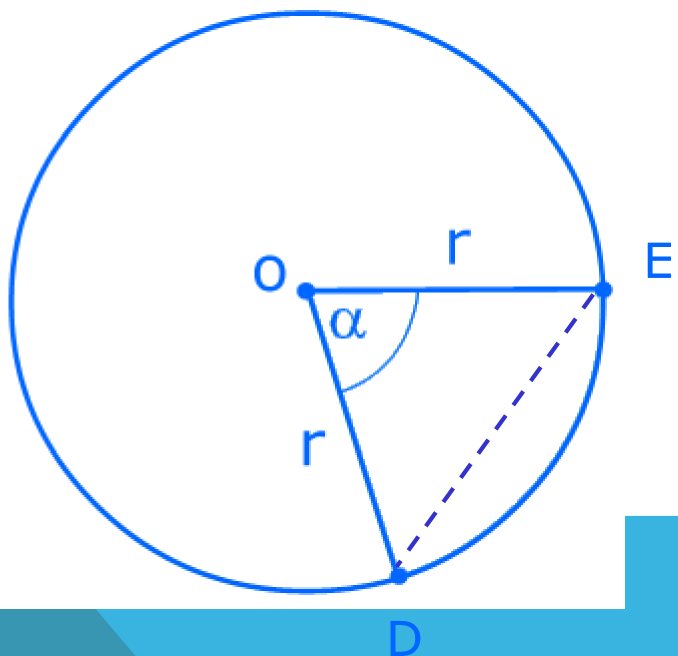


$\overset{\frown}{CE}$: arco de circunferencia

Los puntos **C** y **E** de la circunferencia, determinan el arco **CE.**

ÁNGULO DEL CENTRO

Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus rayos son radios de la misma (ángulo EOD).



O: centro de la circunferencia

r : radio

$\overset{\frown}{DE}$: arco de circunferencia

Observación:

El triángulo formado por dos radios y una cuerda tiene por lo menos dos lados iguales

EJEMPLOS

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es **siempre** verdadera?

   A) Una cuerda y una secante forman un ángulo del centro.
   B) El radio de una circunferencia mide el doble del diámetro.
   C) La mayor secante es el diámetro.
   D) Por tres puntos en el plano siempre pasa una circunferencia.
   E) Dos cuerdas son congruentes si los arcos que subtienden son congruentes.

E

2. Dos circunferencias son concéntricas si

   A) sus diámetros son congruentes.
   B) la misma secante contiene a los centros de ambas circunferencias.
   C) tienen el mismo centro.
   D) sus radios son congruentes.
   E) comparten una tangente.

C

3. En la circunferencia de centro O de figura 1, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros. Si $\overline{AO} = 2x + 4$ y $2\overline{BO} = 6x - 8$, entonces $\overline{AC} =$

   A) 6
   B) 8
   C) 16
   D) 28
   E) 40

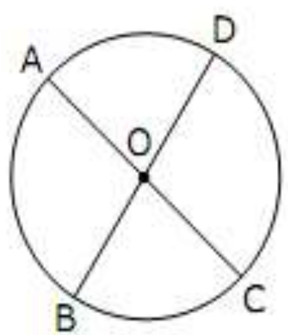


fig. 1

E

4. En la circunferencia de centro O de la figura 2, AB es diámetro. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\gamma = \delta$
II) $\alpha = \delta + \gamma$
III) $180 - \alpha = \gamma + \delta$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

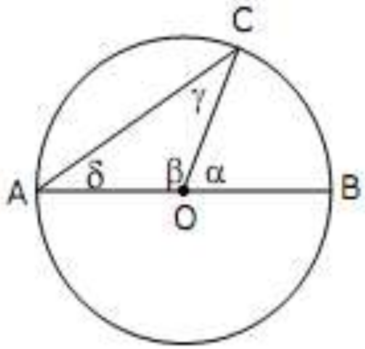


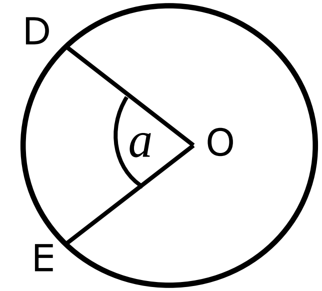
fig. 2

D

MEDIDA ÁNGULAR DE UN ARCO

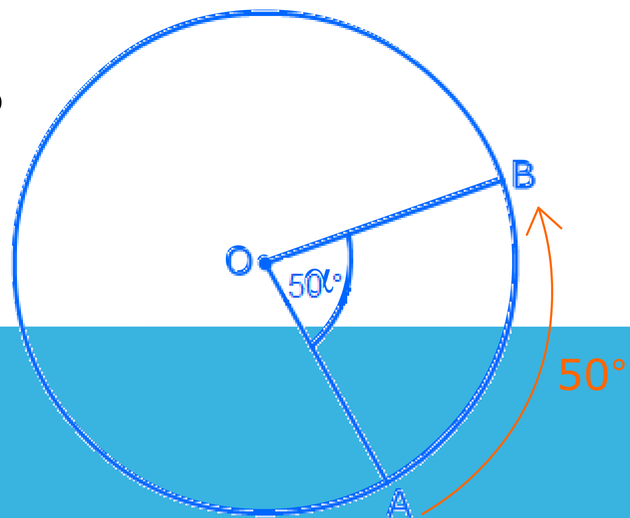
En toda circunferencia la medida angular de un arco es igual a la medida del **ángulo del centro** que subtiende.

$$\overset{\frown}{DE} = \measuredangle EOD = \alpha$$



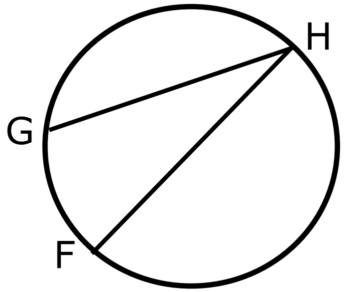
Ejemplo:

Si el arco AB = 50º, entonces α = 50º



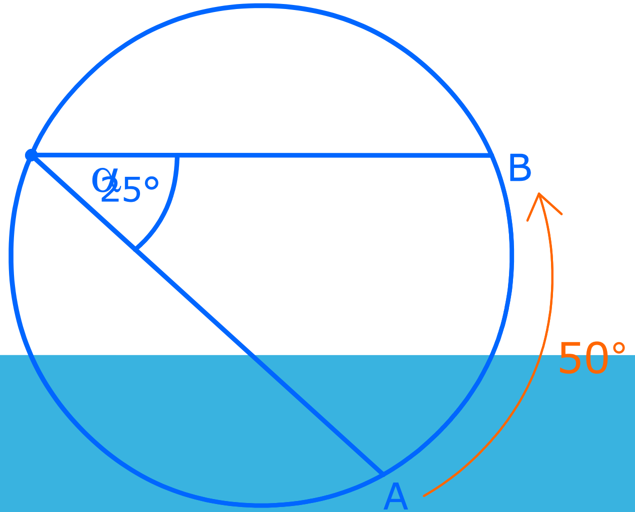
O: centro de la circunferencia

ÁNGULO INSCRITO: Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta (ángulo FHG).



Ejemplo:

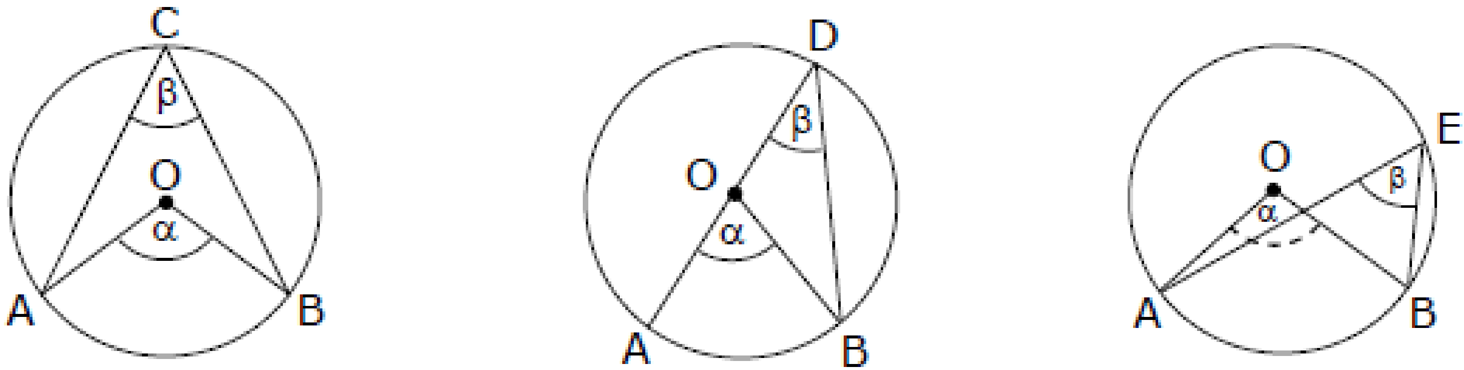
Si el arco AB = 50º, entonces α = 25º



TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\alpha}$$

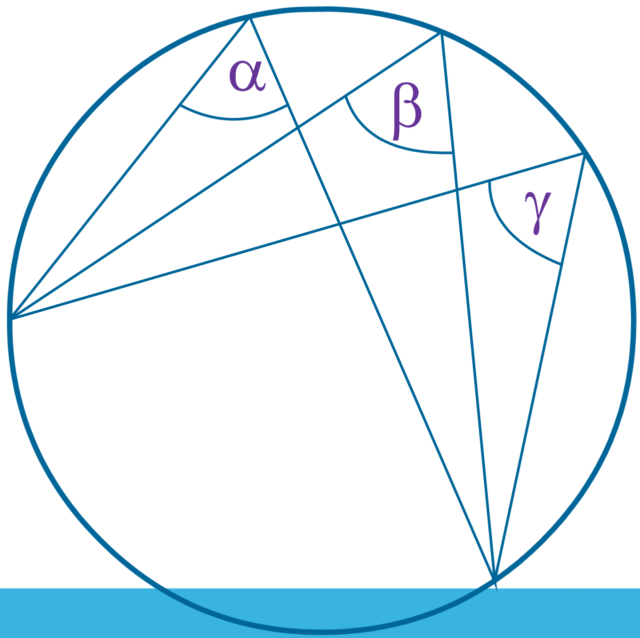


O: centro de la circunferencia

TEOREMA

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida.

$$\alpha = \beta = \gamma$$



EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1, ¿cuánto mide α?

A) 37,50º
B) 43,75º
C) 75,00º
D) 77,50º
E) 207,50º

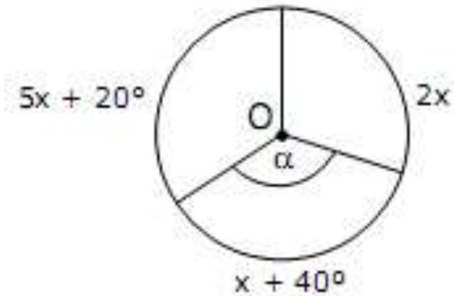


fig. 1

D

2. En la circunferencia de centro O de la figura 2, $3\alpha - \beta = 60º$. Entonces, la medida de α es

A) 12º
B) 30º
C) 60º
D) 75º
E) 90º

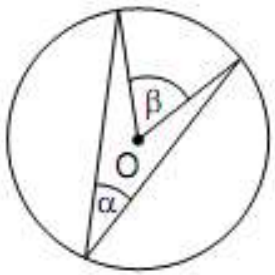


fig. 2

C

3. Si en la circunferencia de la figura 3, $2\alpha + \beta + 3\gamma = 120°$, entonces la medida de β es

A) 15º
B) 20º
C) 24º
D) 40º
E) 60º

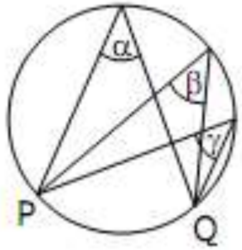


fig. 3

B

4. En la circunferencia de centro O de la figura 4, el $\measuredangle ABC$ mide 80º, luego la medida de α es

A) 10º
B) 15º
C) 20º
D) 70º
E) 80º

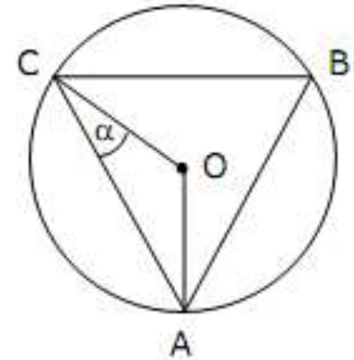


fig. 4

A

5. En la circunferencia de centro O de la figura 5, $\overline{AC}$ es diámetro y el ΔABD está inscrito en la circunferencia. Entonces la medida del $\measuredangle x$ es

A) 20º
B) 30º
C) 35º
D) 55º
E) 70º

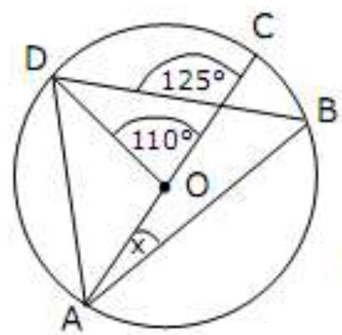


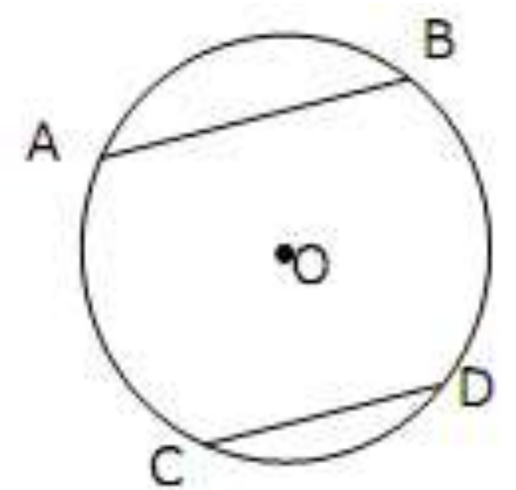
fig. 5

A

TEOREMA

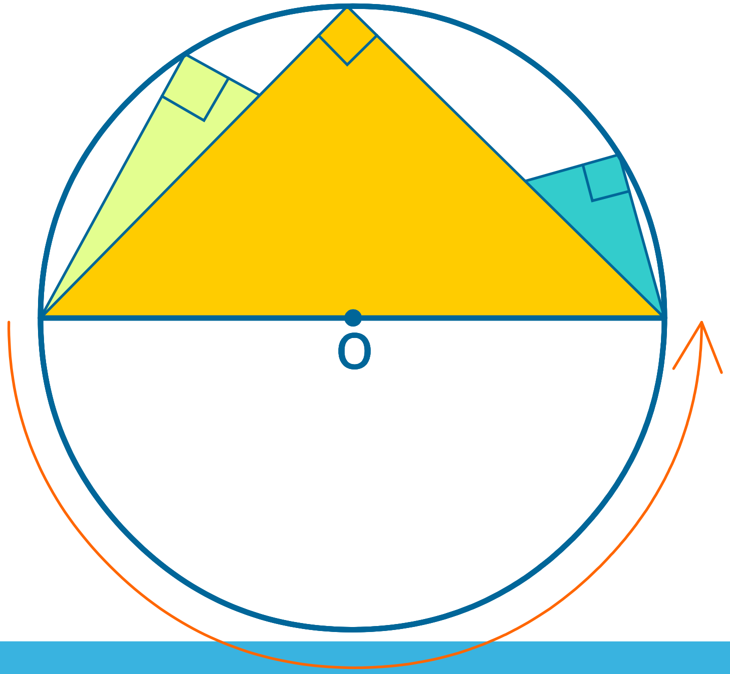
Dos cuerdas paralelas en una circunferencia, determinan entre ellas arcos congruentes.

$$\overline{AB} \, // \, \overline{CD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DB}$$



TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

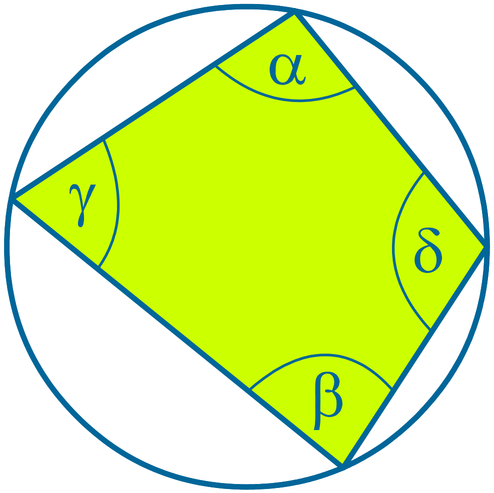


O: centro de la circunferencia

TEOREMA

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

Ejemplo:

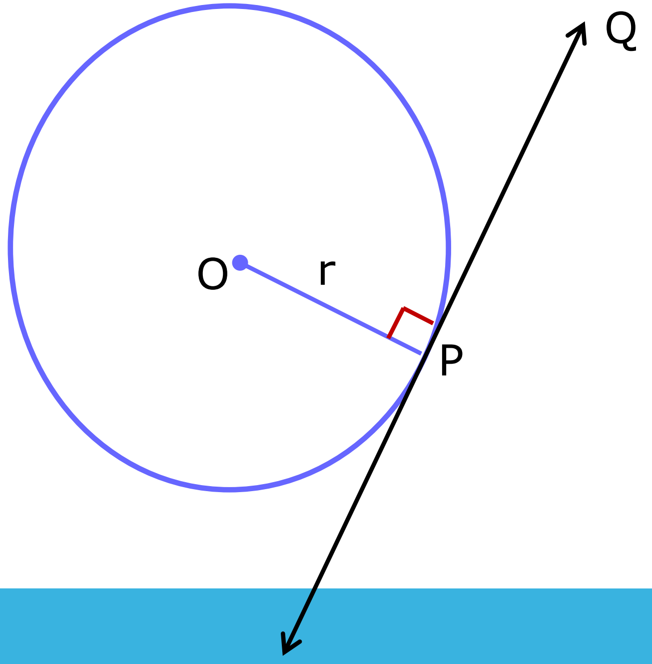


$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\gamma + \delta = 180°$$

TEOREMA

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



$$\boxed{\overline{QP} \ \text{tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}}$$

EJEMPLOS

1. Si en la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overline{BC} // \overline{AD}$ y el $\measuredangle CAD = 40°$, entonces $\widehat{DA} + \widehat{BC}$ =

A) 160°
B) 200°
C) 280°
D) 300°
E) 320°

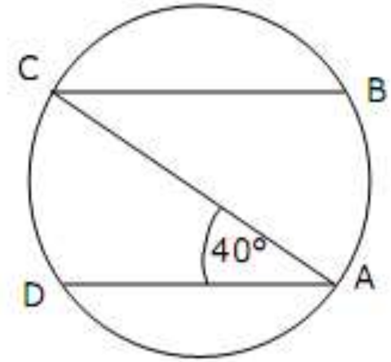


fig. 1

B

2. En la figura 2, $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia de centro O. ¿Cuánto mide el ángulo x?

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

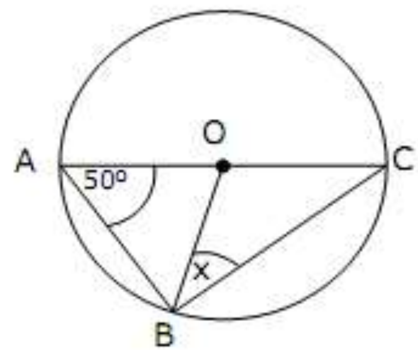


fig. 2

C

3. En la figura 3, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Si $\alpha = 2\gamma$ y $\beta - \delta = 50$, entonces $\delta + \gamma$ =

A) 175°
B) 145°
C) 135°
D) 125°
E) 95°

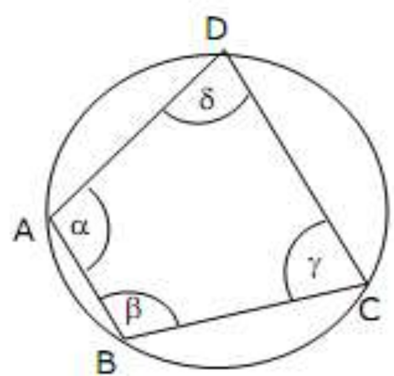


fig. 3

D

4. En la figura 4, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O, en T. ¿Cuánto mide el $\measuredangle QPT$?

A) 10º
B) 20º
C) 40º
D) 50º
E) 80º

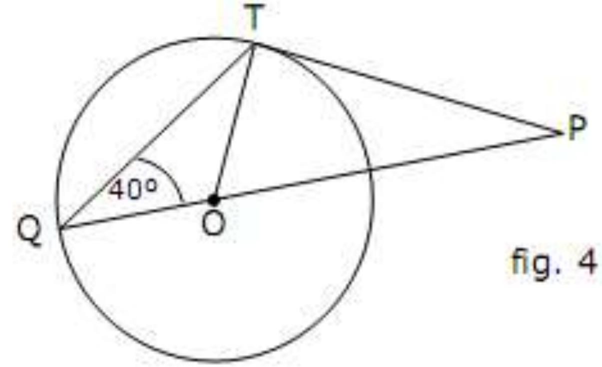


fig. 4

A

5. Si en la figura 5, $\overline{TQ}$ es diámetro, $\measuredangle TQR = 20º$. ¿Cuánto mide el $\measuredangle RPQ$?

A) 35º
B) 40º
C) 55º
D) 70º
E) Falta información.

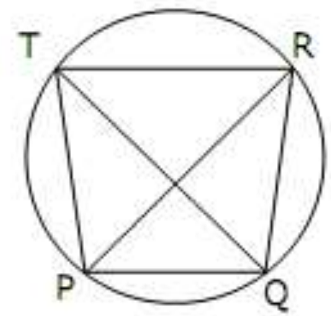


fig. 5

D

ANGULO INTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo interior de la circunferencia es aquel que se forma al cortarse interiormente dos cuerdas, como se muestra en la figura 1, y su medida correspondiente a la semisuma de los arcos que subtienden.

Si α es ángulo interior de la circunferencia, entonces:

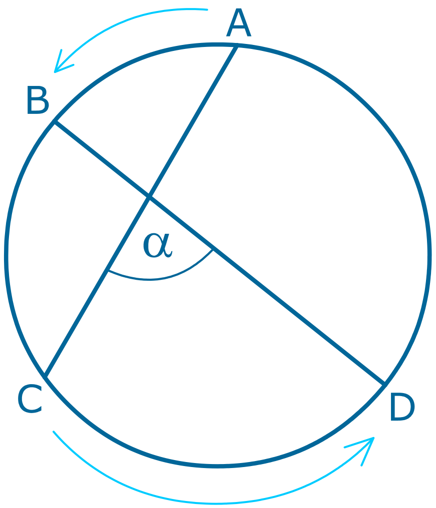


Fig. 1

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

ÁNGULO EXTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo exterior es aquel que tiene su vértice en un punto exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus rayos, tangentes o secantes a la misma, como se muestra en la figura 2, y su medida corresponde a la semidiferencia de los arcos que subtienden.

Si β es ángulo exterior de la circunferencia, entonces:

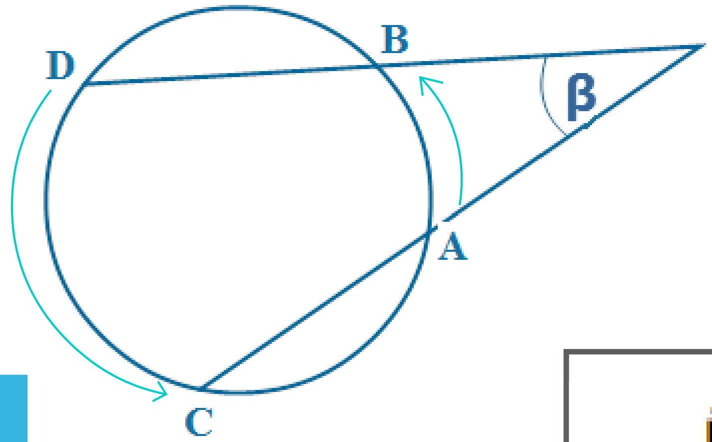


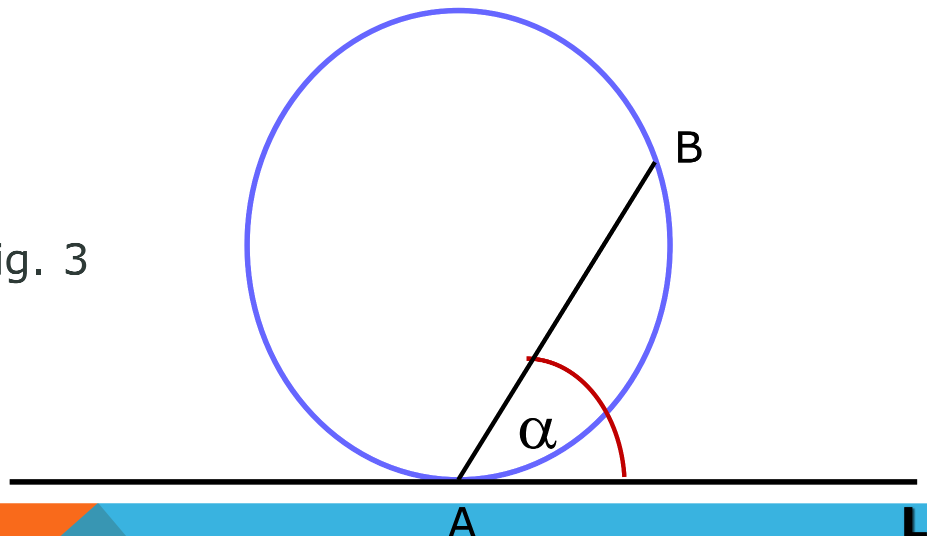
Fig. 2

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$$

ANGULO SEMI INSCRITO

El ángulo semi-inscrito (**β)** es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia sus rayos lo forman una cuerda $\overline{\mathbf{AC}}$ y una recta **L** tangente en **A**, como se muestra en la figura 3, su medida corresponde a la mitad del arco que subtiende.

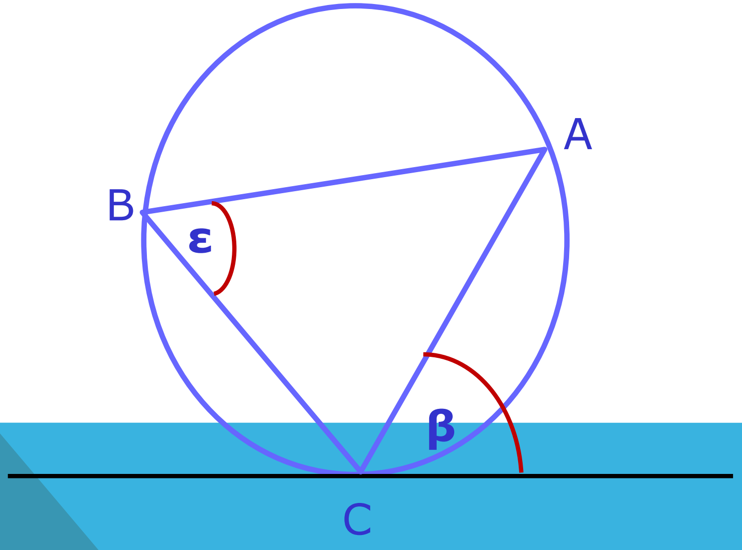
Fig. 3



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

CASO PARTICULAR DEL ÁNGULO SEMI INSCRITO

Si el ángulo **β** formado por una recta tangente a la circunferencia y una cuerda que pase por el punto de tangencia, su medida corresponde a la del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco **ε**.



$$\boxed{\beta = \varepsilon}$$

EJEMPLOS

1. Si en la circunferencia de centro O de la figura 1, $\overline{AD}$ es tangente en A y $\measuredangle DAB = 50°$, entonces ¿cuánto mide $\measuredangle ACB + \measuredangle OBA$?

A) 50°
B) 70°
C) 90°
D) 100°
E) 110°

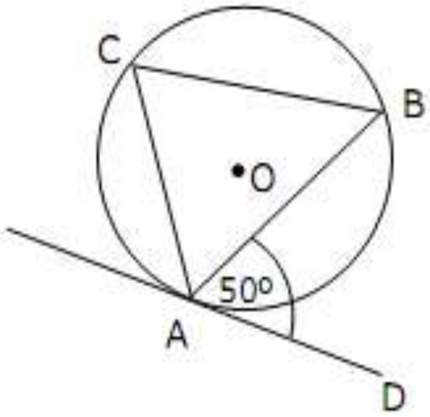


fig. 1

C

2. En la figura 2, $\overset{\frown}{AB} = 100°$ y $\overset{\frown}{CD} = 30°$, entonces el valor de x es

A) 35°
B) 65°
C) 105°
D) 115°
E) 145°

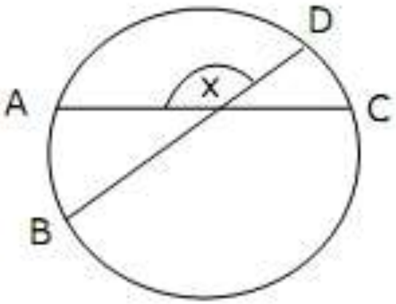


fig. 2

D

3. En la circunferencia de la figura 3, $\overline{DP}$ y $\overline{PA}$ son secantes, $\widehat{DA} = 150°$, entonces el valor de $\widehat{BC}$ es

A) 55°
B) 70°
C) 95°
D) 115°
E) 120°

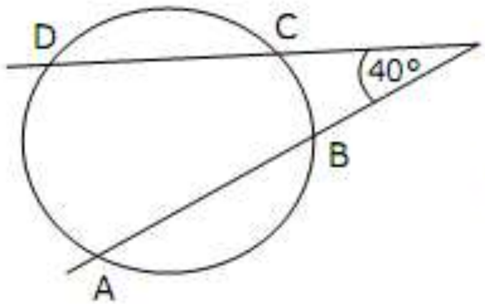


fig. 3

B

4. En la circunferencia de centro O de la figura 4, el valor de $(4x - y)$ es

A) 70°
B) 100°
C) 120°
D) 140°
E) 200°

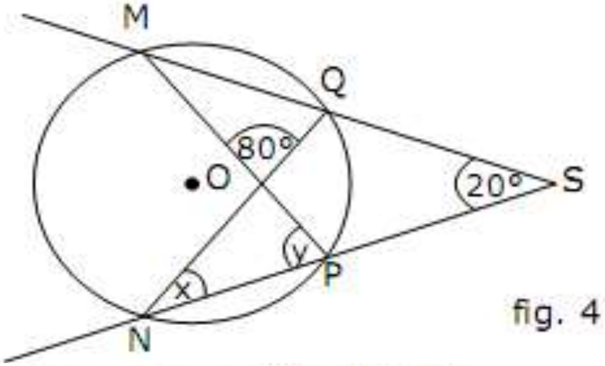


fig. 4

B

5. En la figura 5, $\overline{CT}$ es tangente y $\overline{AB}$ es diámetro, entonces la medida del $\measuredangle x$ es

A) 48°
B) 52°
C) 68°
D) 96°
E) 104°

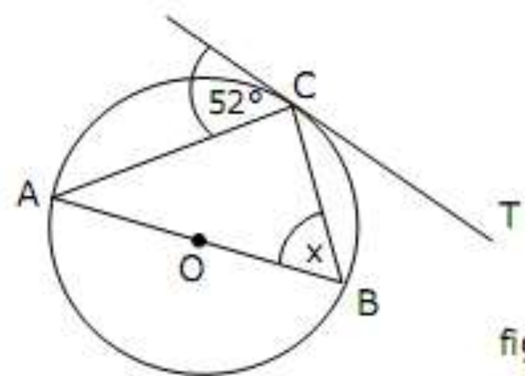


fig. 5

B