Liceo Javiera Carrera
Dpto. Matemática
Lim. Der. e Int.

GUÍA 2 de Retorno

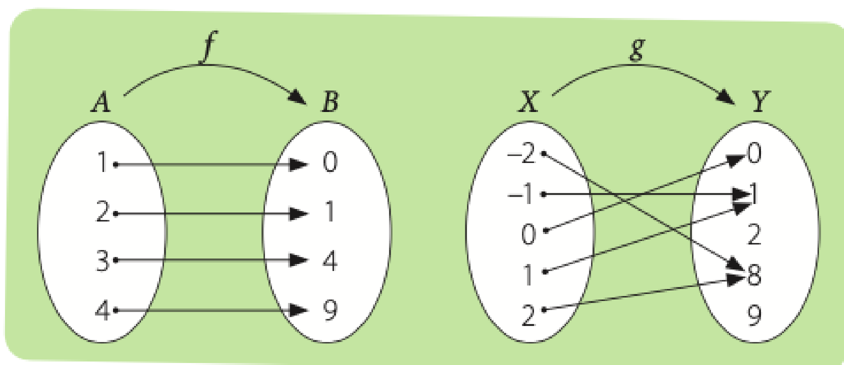
Nombre:________________ 3ºMedio Fecha:_________

Observación: Leer y luego resolver los ejercicios de la actividad adjunta.

FUNCIÓN INYECTIVA

Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación.

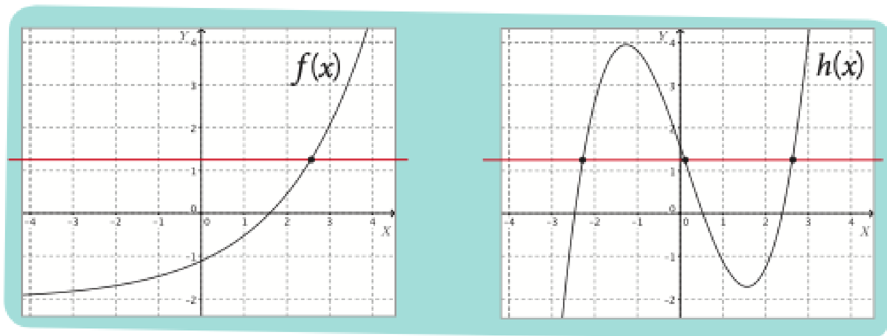
Una **función f** es **inyectiva** o **uno a uno** si se cumple que cuando $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$. Es decir, si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Dicho de otra manera, ningún elemento del recorrido es imagen de dos preimágenes diferentes. Por ejemplo, sean las funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: X \longrightarrow Y$, dos funciones cuya representación mediante diagramas sagitales es la siguiente:



Tenemos que la función $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva porque las imágenes de cada uno de los elementos del dominio son diferentes, en cambio la función $g: X \longrightarrow Y$ no es inyectiva porque $g(-1) = 1$ y $g(1) = 1$, es decir, -1 y 1 tienen la misma imagen.

Para determinar si la función es inyectiva, resulta útil construir su representación gráfica y luego realizar el **test de la recta horizontal**, que consiste en trazar rectas horizontales que intersequen a la gráfica. Si la recta corta a la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva. En cambio, si la recta interseca a la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva.

Por ejemplo, observa las gráficas de las funciones f y h.

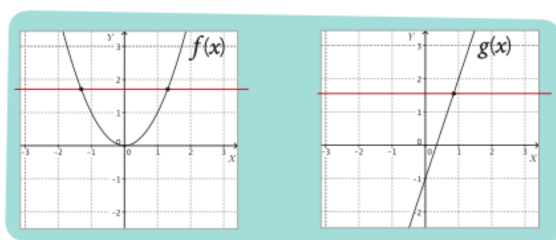


La función f es inyectiva, ya que toda línea horizontal corta la gráfica en un único punto. En tanto, que la función h no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica de h en tres puntos.

¿Cómo hacerlo?

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = 3x - 1$. Determina si f y g son inyectivas.

Al graficar las funciones f y g, nos queda:



En el caso de f, la recta horizontal interseca a la curva en dos puntos, por lo tanto, la función no es inyectiva. Por otro lado, en el caso de g, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Luego g es inyectiva.

Otra manera de resolver el problema es de manera algebraica ya que sabemos que en una función inyectiva se cumple que **si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$.**

Ya que si dos imágenes son iguales, entonces la preimagen debe ser el mismo número.

Aplicamos lo anterior a f y g:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$(x_1 + x_2) = 0 \text{ o } (x_1 - x_2) = 0$$

$$x_1 = -x_2 \text{ o } x_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ 3x_1 - 1 &= 3x_2 - 1 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

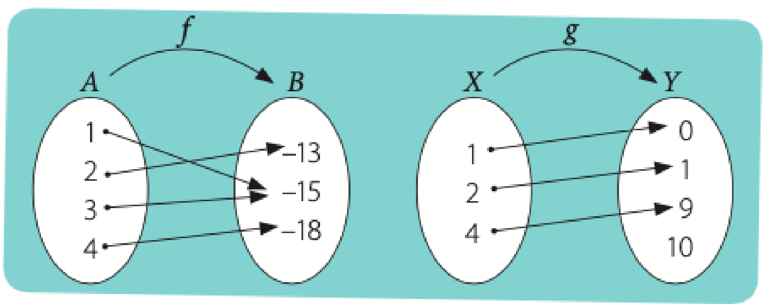
¿Lo entiendes?

Explica los pasos realizados en cada demostración.

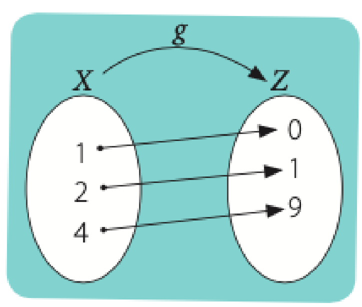
En el caso de g obtuvimos que si dos imágenes son iguales entonces las preimágenes deben ser iguales. En cambio, en el caso de f, podemos ver que si dos imágenes son iguales entonces también puede cumplirse que un elemento del dominio sea el opuesto de otro, por ejemplo, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Luego, la función f no es inyectiva.

FUNCIÓN SOBREYECTIVA

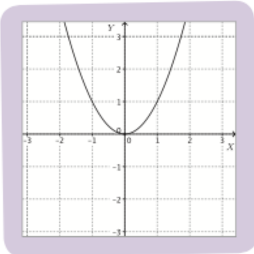
Una **función** f es **sobreyectiva** cuando $Rec\, f = B$. Es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio. Por ejemplo, en las funciones cuyas representaciones sagitales están dibujadas a continuación tenemos que $f: A \longrightarrow B$ es una función sobreyectiva ya que $Rec\, f = B$. Por otro lado, la función $g: X \longrightarrow Y$ no es sobreyectiva ya que hay elementos del conjunto de llegada que no son imágenes de ningún número, en este caso, el 10.



Como g no es sobreyectiva podemos redefinir el codominio para que sí lo sea; por ejemplo, si definimos el conjunto $Z = Y - \{10\}$, tenemos que la función $g: X \longrightarrow Z$ es sobreyectiva ya que todo elemento de Z es imagen de algún elemento del dominio. Observa.



¿Cómo hacerlo?



Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ es sobreyectiva.

En la gráfica de f, que se muestra a la izquierda, tenemos que $rec\ f = \mathbb{R}^+_0$ ya que los valores que toma y son todos los números reales positivos y el 0. Luego, como el codominio de la función es el conjunto de los números reales, tenemos que

$$rec\ f \neq \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la función no es sobreyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el codominio de la función $f(x) = x^2$ de modo que f sea una función sobreyectiva.

En el ejemplo anterior observaste que $rec\ f = \mathbb{R}^+_0$

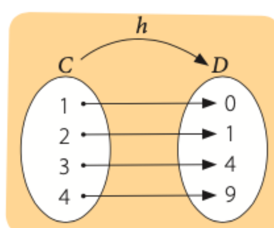
Por lo tanto, si el codominio es el conjunto $\mathbb{R}^+_0$, entonces la función es sobreyectiva. Luego, podemos definir f como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$$

En este caso la función $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pues $rec\ f = codom\ f = \mathbb{R}^+_0$

FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función f es **biyectiva** si es **inyectiva** y **sobreyectiva** a la vez, es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del codominio son imagen de solo un elemento del dominio; por ejemplo, sea la función $h: C \longrightarrow D$ cuya representación es la siguiente:



Se tiene que la función h es biyectiva porque cada elemento del codominio D es imagen de solo un elemento del dominio C, es decir, h es inyectiva y sobreyectiva.

¿Lo entiendes?

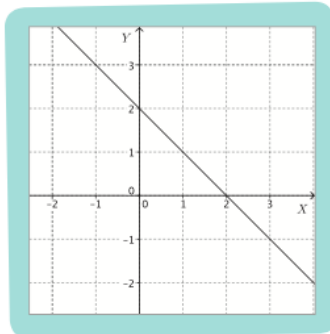
La función del contexto inicial, ¿es biyectiva? Argumenta.

¿Cómo hacerlo?

Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2 - x$ es biyectiva.

Para saber si la función f es biyectiva debemos verificar que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Si te fijas en la gráfica, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Por lo tanto, la función es inyectiva.



Por otro lado, a partir de la gráfica también podemos concluir que el recorrido de la función son todos los números reales, de modo que el recorrido es igual que el codominio, por lo tanto, la función es sobreyectiva.

Finalmente, como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

¿Lo entiendes?

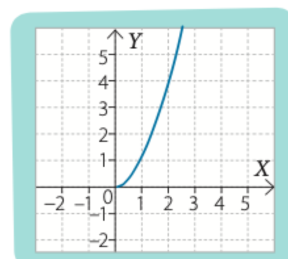
Demuestra algebraicamente que f es inyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el dominio y el codominio de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$, de modo que f sea una función biyectiva.

Como ya hemos analizado, la función $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Para lograr que la función cuadrática sea inyectiva podemos considerar únicamente una de sus ramas. Por ejemplo, la rama de la derecha, tal como se muestra en la figura. En este caso, el dominio de la función son todos los números reales positivos y el 0, es decir, $\mathit{dom}\, f = \mathbb{R}^+_0$.



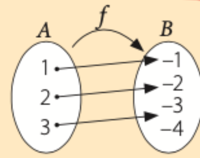
A partir del dominio definido anteriormente podemos determinar el recorrido de la función. Luego, $\mathit{rec}\, f = \mathbb{R}^+_0$.

Finalmente, para que la función sea sobreyectiva, su recorrido debe ser igual que el codominio. Por lo tanto, el codominio debe ser el conjunto de todos los números reales positivos y el 0. En resumen, la función $f: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, definida como $f(x) = x^2$ es biyectiva.

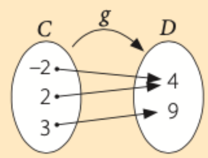
RESUMEN

Tomo nota

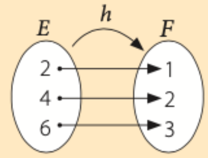
- Una función es **inyectiva** si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Por ejemplo, la función $f: A \longrightarrow B$ representada en el diagrama sagital es inyectiva ya que todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes.



- Una función es **sobreyectiva** si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Por ejemplo, la función $g: C \longrightarrow D$ representada en el diagrama sagital es sobreyectiva ya que todo elemento del codominio D tiene al menos una preimagen.



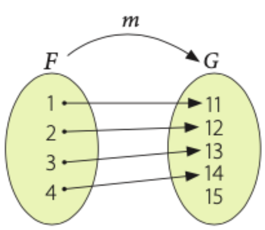
- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen. Por ejemplo, en la función $h: E \longrightarrow F$ representada en el diagrama sagital, a cada elemento de codominio F le corresponde una única preimagen.



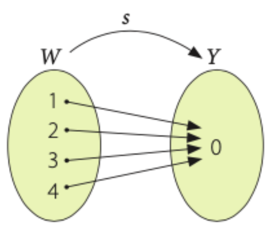
Actividades

1. Determina si la función dada es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifica tu respuesta.

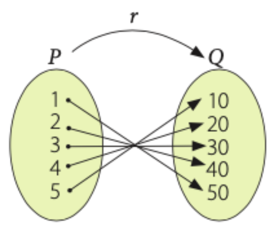
a.



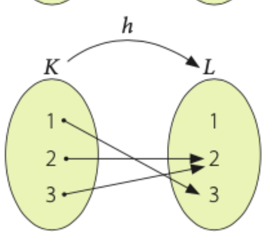
c.



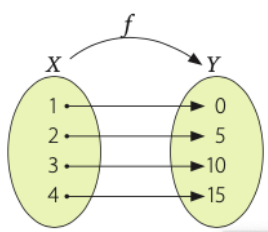
e.



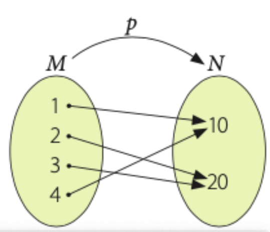
b.



d.



f.



2. De las funciones anteriores, ¿cuál o cuáles son biyectivas? Justifica tu respuesta.

3. Dados los conjuntos
$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{10, 100, 1\,000, 10\,000\}$ y la función $f: A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = 10^x$ para cada $x \in A$.

a. Representa con un diagrama sagital a f.

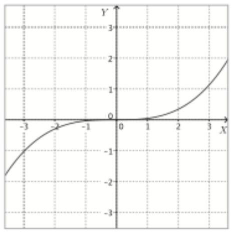
b. Establece el conjunto de pares ordenados de f.

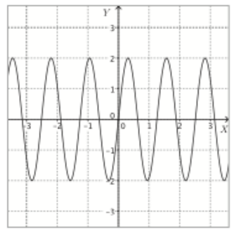
c. Determina si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

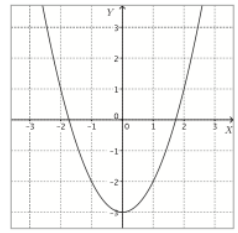
Trabajo

EN PAREJAS ▸ **Realicen la etapa 2 del trabajo de la unidad de las páginas 90 y 91.**

4. **Determina si las siguientes funciones son inyectivas o no. Justifica tu respuesta.**

a. 

b. 

c. 

5. **Determina, en cada caso, si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. La función $f(x) = 8 - 4x$ es inyectiva.
   b. Toda función inyectiva es biyectiva.
   c. Toda función biyectiva es sobreyectiva.
   d. La función $f\colon M \longrightarrow N$ es sobreyectiva si $Rec\, f = N$.

Desafío

Explica cuál es la similitud entre la definición de función y la de función biyectiva.

6. **Determina cuáles de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son inyectivas. Justifica tu respuesta.**
   a. $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$ b. $f(x) = 0{,}3x^4$ c. $f(x) = 3 + e^x$ d. $f(x) = log\, x + 2$

7. **Determina cuáles de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son sobreyectivas. Justifica tu respuesta.**
   a. $f(x) = 5(x - 6)$ b. $f(x) = 3(x - 2)^3 + 5$ c. $f(x) = 6^x$ d. $f(x) = log\, x$

8. **Responde las siguientes preguntas.**
   a. ¿Cómo identificas a una función inyectiva a partir de su representación gráfica?
   b. ¿Cómo determinas si una función es sobreyectiva a partir de su expresión algebraica?

9. **Define una función que cumpla con las condiciones dadas.**
   a. $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que sea inyectiva.
   b. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que sea sobreyectiva.
   c. Que sea sobreyectiva pero no inyectiva.
   d. Que sea inyectiva pero no biyectiva.

10. CONEXIÓN CON LA INDUSTRIA ▶ **En una fábrica se puede modelar el costo de x camisas mediante la expresión: $C(x) = 3x^2 + 5$.**
    a. ¿Cuánto valen 1 000 camisas?
    b. ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?
    c. En este contexto, ¿la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.

11. **Se quiere construir un acuario de 3 m³ de volumen y 1,5 m de altura, donde x representa el largo e y el ancho de la base del acuario.**
    a. Determina la cantidad M de metros cuadrados de vidrio necesarios, como función de x.
    b. Indica el dominio de la función $M(x)$.
    c. Determina si la función $M(x)$ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Justifica tu respuesta.

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre una función inyectiva y una sobreyectiva?
2. ¿Qué condiciones debe cumplir una función para que sea biyectiva? Comenta con tu curso.

SOLUCIONARIO

Páginas 96 y 97

Actividades

1. a. m es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. m no es sobreyectiva, porque 15 pertenece al codominio, pero no al recorrido.

   b. h no es inyectiva, porque 2 tiene dos preimágenes, ni sobreyectiva, porque 1 no tiene preimagen.

   c. s es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales. s no es inyectiva, porque todos los elementos del dominio tienen la misma imagen.

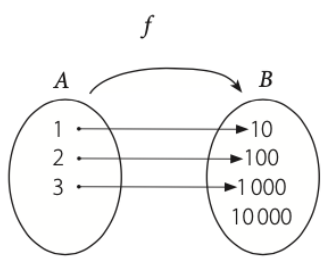
   d. f es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen y es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.

   e. r es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen y es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.

   f. p es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales, pero no es inyectiva, ya que tanto 10 como 20 tienen dos preimágenes.

2. Las funciones r y f son biyectivas.

3. a.



   b. (1, 10), (2, 100), (3, 1 000)

   c. f es inyectiva, pero no sobreyectiva, luego, tampoco es biyectiva.

4. a. Sí es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen.

   b. No es inyectiva, porque para cada elemento del recorrido existen infinitas preimágenes, ya que la función es periódica.

   c. No es inyectiva, porque para casi todos los elementos del recorrido existen dos preimágenes.

5. a. V
   b. F, para que una función sea biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva.
   c. V
   d. V

6. a. Sí es inyectiva, porque al desarrollar la expresión se obtiene $f(x) = 2x + 1$, y toda función lineal o afín es inyectiva.
   b. No es inyectiva, porque para casi todos los elementos del recorrido existen dos preimágenes.
   c. Sí es inyectiva, porque para cualquier x_1 y x_2 se tiene que si $3 + e^{x_1} = 3 + e^{x_2}$, se cumple que $x_1 = x_2$.
   d. Sí es inyectiva, porque por propiedades de logaritmos, cuando $\log x_1 + 2 = \log x_2 + 2$ se cumple que $x_1 = x_2$.

7. a. Sí es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.
   b. Sí es sobreyectiva porque el codominio y el recorrido son iguales.
   c. No es sobreyectiva, porque el recorrido es $\mathbb{R}^+$.
   d. Sí es sobreyectiva porque el codominio y el recorrido son iguales.

8. a. Observando si toda recta horizontal interseca solo una vez la gráfica de la función.
   b. Analizando si existen valores que no puedan ser representados por la función, por ejemplo, valores negativos en el caso de una función cuadrática con $a > 0$.

9. a. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$
   b. Por ejemplo, $f(x) = |x|$
   c. Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 4x$
   d. Por ejemplo, $f(x) = e^x$

10. a. $ 3 000 005
    b. $\mathbb{N}$
    c. No, porque no es sobreyectiva.

11. a. $M(x) = \frac{6}{x} + 3x + 4$
    b. $Dom\ M$ = {números reales positivos menores que 2}.
    c. No es inyectiva, ni sobreyectiva.

Antes de continuar

1. Por ejemplo, en una función inyectiva las preimágenes de elementos iguales deben ser iguales y en una función sobreyectiva las imágenes de los elementos del dominio deben cubrir todos los elementos del codominio.

2. Debe ser inyectiva y sobreyectiva a la vez.