Liceo Javiera Carrera
Dpto. Matemática

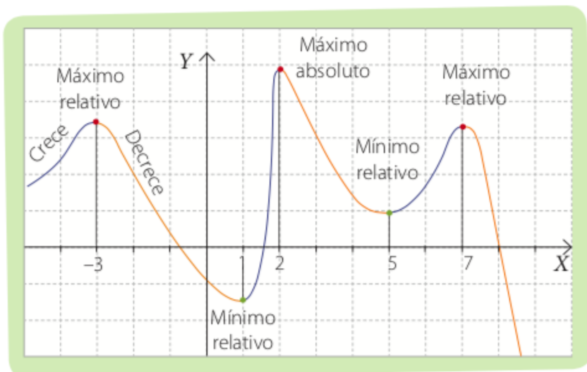
GUÍA 2 de Retorno

Nombre:________________ 4ºMedio Fecha:________

Observación: Leer y luego resolver los ejercicios de la actividad adjunta.

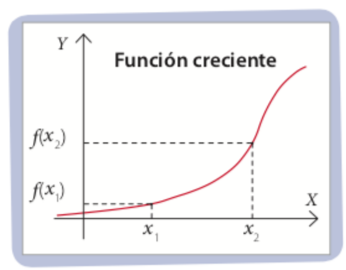
Función Creciente y Decreciente:

Analiza la siguiente gráfica de una función.



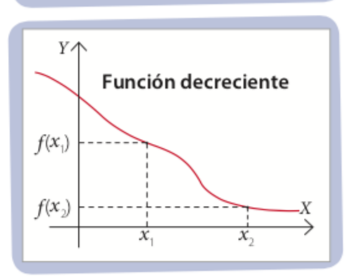
En la gráfica, podemos observar que la función "sube" o crece para los valores de x que están en $]-\infty, -3[$, $]1, 2[$ y en $]5, 7[$. En cambio, la función "baja" o decrece para los valores de x que están en $]-3, 1[$, en $]2, 5[$ y en $]7, +\infty[$.

En general una función es **creciente** si al aumentar los valores de x aumentan los valores de $f(x)$, es decir, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.



Gráficamente, se puede interpretar que una función es creciente cuando, al mirarla de izquierda a derecha, la gráfica sube; por ejemplo, la gráfica que se muestra a la derecha.

Por otra parte, una función es **decreciente** si al aumentar los valores de x disminuyen los valores de $f(x)$, es decir, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.



Se puede interpretar que una función es decreciente cuando su gráfica baja. Así, en la gráfica de la función f de la derecha podemos observar que esta baja al mirarla de izquierda a derecha.

En los valores de x en que la función pasa de creciente a decreciente, se dice que hay un **máximo relativo**, siempre que la función esté definida. De manera similar, cuando la función pasa de decreciente a creciente, se dice que esos valores de x son un **mínimo relativo**. Y se dice que son máximos o mínimos **absolutos** cuando $f(x)$ es el mayor o menor valor del recorrido, respectivamente.

Asintotas:

Analiza la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{x-6} + 4$.

Si te fijas, la gráfica de g decrece para todos los valores de x en $]-\infty, 6[\cup]6, +\infty[$. También ocurre que cuando $x = 6$ la función no está definida.

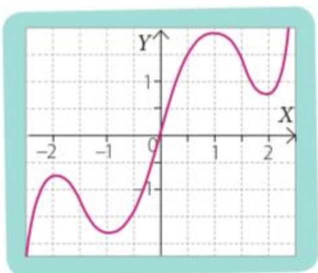
Además, se aprecia que la gráfica de la función se acerca por ambos lados a la recta $x = 6$ (pintada de azul) pero sin llegar a tocarla. Lo mismo sucede con la recta $y = 4$ (pintada de rojo). Esto significa que las rectas $x = 6$ e $y = 4$ son las **asíntotas** de la función, es decir, la gráfica se aproxima en forma indefinida a la o las rectas pero sin llegar a tocarlas.

¿Lo entiendes?

¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función $g(x)$?

Ejemplos:

¿Cómo hacerlo?



A partir de la función cuya gráfica está representada en la figura, determina los valores de x para los cuales la función es creciente y para los cuáles es decreciente. También determina los mínimos y máximos relativos.

A partir de la gráfica, podemos observar que entre $x = -2$ y $x = -1$ y entre $x = 1$ y $x = 2$ la función es decreciente. Luego, entre $x = -1$ y $x = 1$ la función es creciente.

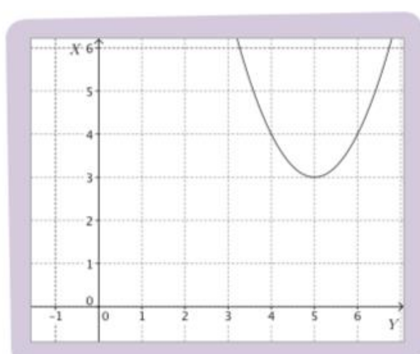
Cuando $x = -1$ y $x = 2$ la función alcanza un mínimo relativo, y cuando $x = -2$ y $x = 1$ la función alcanza un máximo relativo.

¿Cómo hacerlo?

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = (x - 5)^2 + 3$. Determina los valores de x para los cuales la función es creciente y decreciente.

La función $f(x) = (x - 5)^2 + 3$ corresponde a una traslación de 5 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba respecto de la función $f(x) = x^2$.

Luego, la gráfica de la función es la que se muestra a continuación.

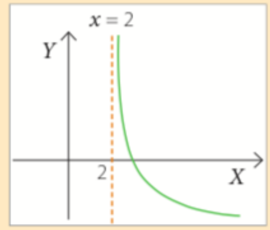


El vértice de la parábola es el punto (5, 3). Por lo tanto, la función es decreciente en $]-\infty, 5[$ y la función es creciente en $]5, +\infty[$. En este caso, para $x = 5$ la función alcanza un mínimo absoluto.

Resumen:

Tomo nota

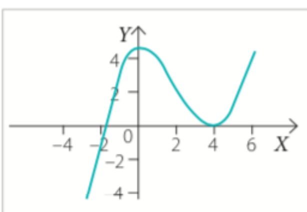
- Una función f es **creciente** si al aumentar los valores de x aumentan los valores de $f(x)$. En otras palabras, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función f es **decreciente** si al aumentar los valores de x disminuyen los valores de $f(x)$. En otras palabras, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
- La **asíntota** de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca indefinidamente sin llegar a tocarla. Por ejemplo la recta $x = 2$ es una asíntota de la función cuya gráfica se muestra en la figura.



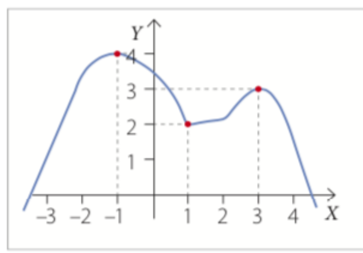
Actividad

1. Determina para cuáles valores de x cada función es creciente y para cuáles es decreciente. Además, identifica los mínimos y máximos absolutos y relativos.

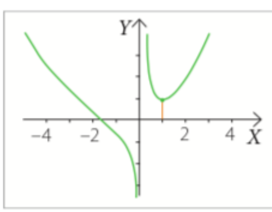
a.



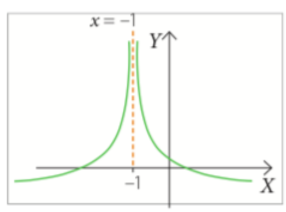
c.



b.



d.



2. Responde las siguientes preguntas respecto de la función $f(x) = log(x)$.

a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿y su recorrido?

b. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento de la función f?

c. ¿Cuáles son los intervalos de decrecimiento de la función f?

d. ¿Esta función tiene asíntotas? Si es así, ¿cuál o cuáles son sus asíntotas?

Desafío

Determina todos los valores de a para los cuales la función $f(x) = a(x - 6)^2 + (3 - a)x$ es creciente.

3. En tu cuaderno, dibuja la gráfica de una función que cumpla las características indicadas, en cada caso.

a. Creciente en $]-9, -2[\cup]0, 4[\cup]7, 10[$ y decreciente en $]-2, 0[\cup]4, 7[\cup]10, 12[$.

b. Creciente en $]-5, -3[\cup]2, 3[$ y decreciente en $]-3, 2[\cup]3, 9[$.

c. Con asíntotas $x = 2$ y $x = 10$.

d. Con asíntotas $x = -3$, $y = 6$ y $x = 5$.

4. **EN PAREJAS ▶ Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades.**

a. Usando un *software* para graficar funciones, construyan la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

b. ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y su recorrido?

c. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento de la función f? ¿y los de decrecimiento?

d. ¿Cuáles son las asíntotas de la función? Verifiquen su respuesta graficándolas.

e. Repitan lo anterior para la función $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x}$.

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre el codominio y el recorrido de una función?
2. Nombra 3 funciones que sean crecientes en todo su dominio.

SOLUCIONARIO

1. a. Creciente en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ y decreciente en $]0, 4[$. Máximo relativo en $x = 0$ y mínimo relativo en $x = 4$. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

   b. Creciente en $]1, +\infty[$ y decreciente en $]-\infty, 1[$ (con $x \neq 0$, ya que $x = 0$ es asíntota). Mínimo relativo en $x = 1$. No tiene máximo relativo ni máximos o mínimos absolutos.

   c. Creciente en $]-\infty, -1[\cup]1, 3[$ y decreciente en $]-1, 1[\cup]3, +\infty[$. Máximo absoluto en $x = -1$, máximo relativo en $x = 3$ y mínimo relativo en $x = 1$. No tiene mínimos absolutos.

   d. Creciente en $]-\infty, -1[$ y decreciente en $]-1, +\infty[$. No tiene máximos ni mínimos absolutos ni relativos.

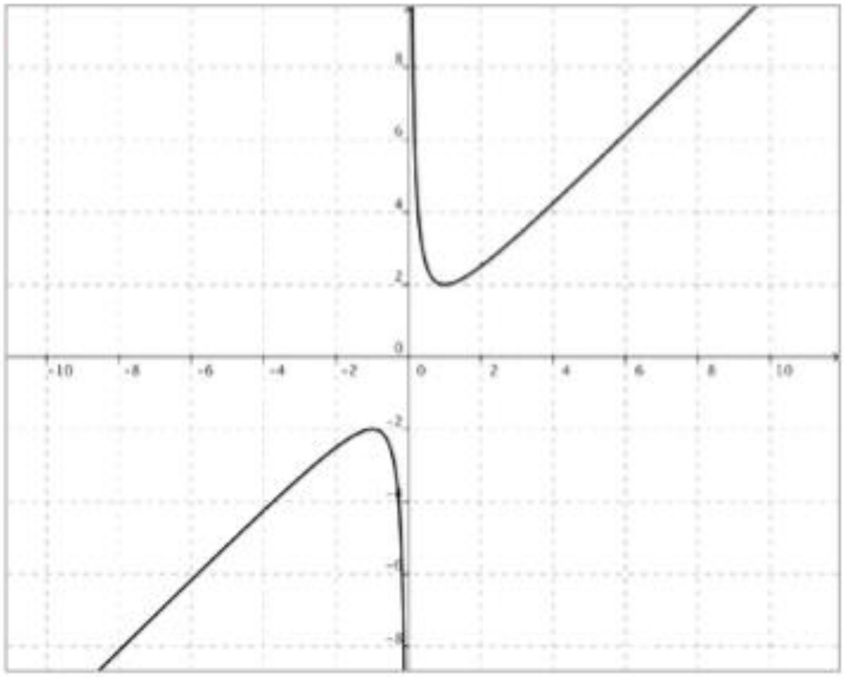
2. a. $Dom\, f(x) = \mathbb{R}^+$, $rec\, f(x) = \mathbb{R}$.

   b. En todo su dominio.

   c. Nunca.

   d. $x = 0$

3. Pregunta abierta.

4. a. 

b. ***Dom*** $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, ***rec*** $f(x) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

c. Creciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y decreciente en $]-1, 1[- \{0\}$.

d. Tiene una asíntota en $x = 0$.