Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Unidad Nº1: EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS (ℂ)

NOMBRE ESTUDIANTE		**CURSO**	3° Medio _____
ASIGNATURA	Matemática	**SEMANA N°2 /Nº5**	08/ Marzo/ 2021 al 02/Abril/2021
PROFESORA	Carolina Salort Henríquez		

Tema 1: Conjunto de los números complejos

OA1: Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

Indicadores:

- Representan números complejos en el plano, relacionando con vectores e identificando las partes reales e imaginarias.
- Utilizan los números complejos y sus representaciones pictóricas y simbólicas para encontrar solución a ecuaciones.
- Determinan la distancia de números complejos de forma simbólica y pictórica.
- Representan la operatoria de números complejos de forma simbólica y en el plano cartesiano.
- Utilizan los números complejos y su operatoria para resolver problemas en modelos relacionados con los circuitos eléctricos.

Instrucciones:

1. La siguiente es una actividad de aprendizaje del contenido relacionada al Conjunto Numérico de los Complejos.

2. Debes resolver las actividades en tu cuaderno o carpeta de la asignatura y evidenciar tus avances semanales

3. Toda duda o consulta se debe informar al mail csalort@liceojavieracarrera.cl la cual será respondida a la brevedad.

4. El desarrollo de la actividad se realizara según la siguiente tabla y TODOS LOS ESTUDIANTES DEBEN REALIZAR ENVIO DE ACTIVIDADES EN LAS FECHAS ESTABLECIDAS.

Guía Nº1

PLAN DE ACTIVIDAD MENSUAL
MONITOREO DEL AVANCE DE LA ACTIVIDAD POR EL ESTUDIANTE

Semana	Actividad de Aprendizaje	Entrega de avances	Monitoreo de avance		
		Fecha se entrega	Entregado	Pendiente	No lo puedo resolver solo
Semana 2	Ítem I: Recordar Conjuntos Numéricos	12/Marzo/2021			
Semana 3	Ítem II: Identificar la Unidad Imaginaria	19/Marzo/2021			
Semana 4	Ítem III : Identificar Potencias Imaginarias	26/Marzo/2021			
Semana 5	Ítem IV: Las aplicaciones de los números complejos.	02/Abril/2021			

Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Ítem I: Recordar Conjuntos Numéricos

OA1: Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

Inicio

¡Comencemos con la Unidad 1 del texto recordando lo que hemos aprendido en años anteriores! Particularmente recordemos los **Números Reales** ya que te servirá para caracterizarlos y relacionarlos con los otros conjuntos numéricos que conoces, como los naturales, los cardinales y los enteros

¡Recuerda!

Los números racionales ($\mathbb{Q}$) son todos los números que se pueden escribir como fracción, dentro de ellos entran los enteros ($\mathbb{Z}$) puesto que los podemos escribir partidos en uno, lo mismo para los naturales ($\mathbb{N}$)

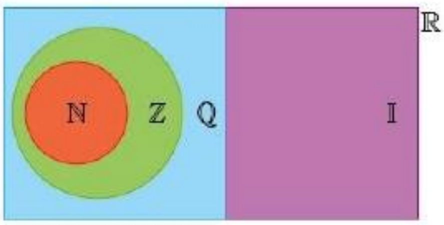
Todo número que no puede escribirse como fracción se denomina como numero irracional (II)

Copia en tu cuaderno :

Conjuntos Numéricos

Conjuntos Numéricos

- El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), cuyos elementos son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
- El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), compuesto por los números naturales, el cero y los números negativos. Se representa por $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), que se define como $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.
  Los números naturales y los números enteros también son números racionales (usando $b = 1$), y también los números decimales finitos e infinitos periódicos y semiperiódicos.
- El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), conformados por todos aquellos números que no pueden escribirse como un cociente de dos números enteros. Son números irracionales todos los decimales infinitos que no tienen periodo.
- El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), que contiene a todos los números racionales e irracionales.



Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Ordenemos los conjuntos numéricos

Conjunto de Números Reales $\mathbb{R}$

Números Racionales $\mathbb{Q}$

El conjunto de los **Números Racionales $\mathbb{Q}$** está formado por todos los números que **pueden representarse como una fracción**, su presentación decimal puede ser finita, infinita periódica o infinita semiperiódica

Ejemplos:

$2{,}3\,;\ \ 5,\bar{4};\ \ \ 0{,}489;\ \ \ 5;\ \ \ -3$

Números Irracionales $\mathbb{I}$

Existen números que **no pueden representarse como fracción** siendo su representación decimal infinita no periódica. Estos conforman el conjunto de los **Números Irracionales $\mathbb{I}$**

Ejemplos:

$\pi \approx 3{,}1415926535\,897932384$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7320508075\,688772935$

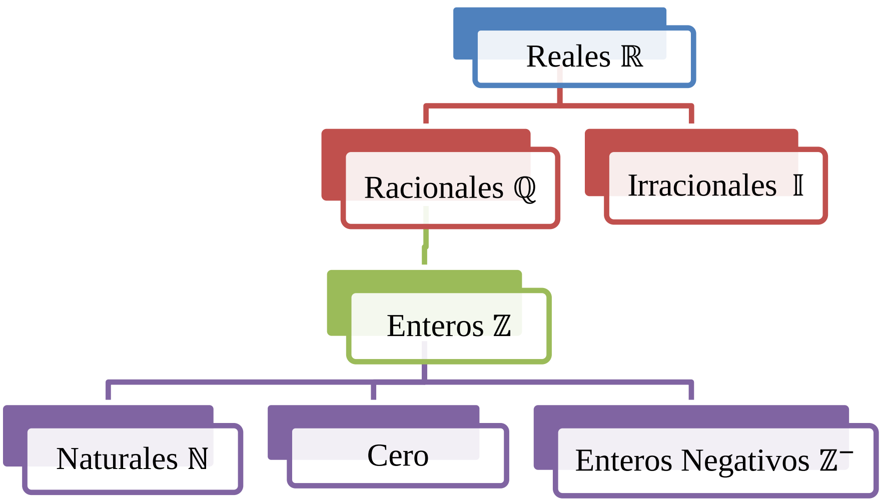
Si es **Irracional** tiene una expresión decimal **infinita** y no periódica.

Conjunto de los números Reales $\mathbb{R}$

El conjunto de los Números Reales $\mathbb{R}$ incluye los **Números Racionales $\mathbb{Q}$** y los **Números Irracionales $\mathbb{I}$.**

Es decir: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Los conjuntos $\mathbb{Q}\ y\ \mathbb{I}$ son disjuntos, es decir, no existe un número real que sea racional e irracional simultáneamente



Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Actividad Nº1:

Anota una ∈ si el numero pertenece al conjunto numérico, en caso contrario anota ∉ (no pertenece)

a. -45 ◯ $\mathbb{N}$

b. $\frac{1}{7}$ ◯ $\mathbb{Z}$

c. $-\frac{1}{12}$ ◯ $\mathbb{Q}$

d. $1\,508$ ◯ $\mathbb{Z}$

e. $1{,}14142$ ◯ $\mathbb{Q}$

f. $0{,}5$ ◯ $\mathbb{N}$

g. -72 ◯ $\mathbb{Z}$

h. π ◯ $\mathbb{Q}$

i. 108 ◯ $\mathbb{N}$

Actividad Nº2:

Completa con *es, puede ser o no es*

a. Un número entero ________________ un número racional.

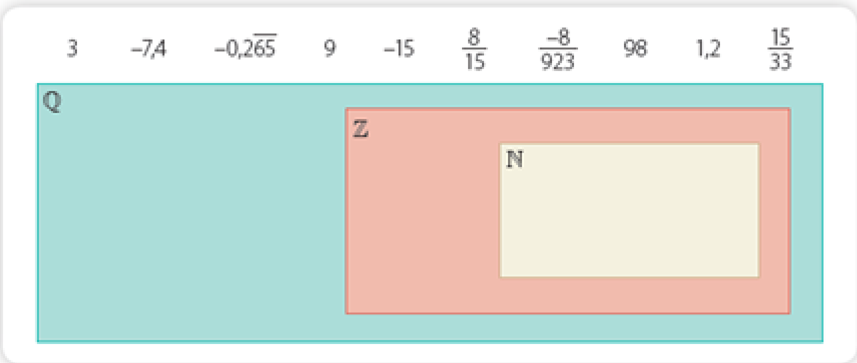
b. Un número decimal infinito ________________ representado como fracción.

c. Una raíz cuadrada no exacta ________________ un número racional.

d. Una fracción irreducible ________________ equivalente a un número decimal periódico.

Actividad Nº3

Observa el siguiente diagrama, Luego, ubica en el conjunto numérico correspondiente



Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Actividad Nº4:

Identifica si cada número pertenece ∈ o no pertenece ∌ al conjunto dado.

Número / conjunto	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
21				
3,14				
-256898				
$\sqrt{144}$				
$\sqrt{35}$				
$-\sqrt{49}$				
-28,1				
12,7639876				
$\sqrt{3}$				

Actividad Nº5

Expresa los siguientes números decimales como fracción

a. 6,2	b. $0,\overline{43}$
c. 4,38	d. $0,\overline{025}$
e. 2,552	f. $0,4\overline{26}$
g. 7,9913	h. $2,4\overline{35}$

Ítem II: Identificar la Unidad Imaginaria

OA1: Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

Actividad Nº1

Determina la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
b) $3x^2 + 5x + 3 = 0$
c) $4x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $-10x^2 + 6x - 1 = 0$
e) $x^2 + 4 = 0$

- ¿Qué tienen en común las soluciones de todas las ecuaciones propuestas?
- ¿Qué significa tal solución?
- ¿Hay una forma diferente de expresar las soluciones propuestas?

La ecuación $x^2 + 4 = 0$ es de segundo grado de Tipo 2 (Ecuación cuadrática incompleta Pura). Dando las soluciones a esa ecuación obtendremos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x^2 + 4} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x^2} &= \mathbf{-4} \quad /\textit{Calculamos Raiz} \\ \boldsymbol{x} &= \pm\sqrt{\mathbf{-4}} \\ \boldsymbol{x} &= \pm\sqrt{\mathbf{4 \cdot -1}} \\ \boldsymbol{x} &= \pm\sqrt{\mathbf{4}} \cdot \sqrt{\mathbf{-1}} \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{-1}} \end{aligned}$$

- De lo anterior, sabemos que $\sqrt{-1}$ $NO\ tiene\ solucion\ en\ \mathbb{R}$
- Evidentemente No tiene raíces Reales
- En el sistema de los números complejos esta ecuación si tiene solución. Es más cualquier ecuación cuadrática siempre tiene soluciones en los números complejos

Definición Nº 1: Unidad Imaginaria

Se define unidad imaginaria como una extensión de los Números Reales, pues no hay un número real que tenga un cuadrado negativo.
Toda unidad Imaginaria se define matemáticamente como:

$$i = \sqrt{\mathbf{-1}}$$

Analógicamente,

$$i^2 = \mathbf{-1}$$

Guía Nº1

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Primer Paso: Aplicar la Fórmula Cuadrática

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Segundo Paso: Se Aplica la de $i = \sqrt{-1}$

Se sustituye $\sqrt{-4}$ por $\sqrt{4i}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4i}}{2}$$

Tercer Paso: Se simplifica las expresiones resultantes

Se simplifica $\sqrt{4}$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

Se saca 2 de factor común

$$\boldsymbol{x = \frac{2(1 \pm i)}{2}}$$

Se cancelan los factores comunes del numerador y denominador

$$x = 1 \pm i$$

Cuarto Paso: Concluir

La ecuación dada tiene dos raíces

$$x_1 = 1 + i \quad y \quad x_2 = 1 - i$$

Guía Nº1

Actividad Nº2

- Jaime resuelve las siguientes ecuaciones y anota el conjunto al cual pertenece su solución.

Ecuación	Conjunto
$2x + 3 = 8$	$\mathbb{Z}$
$7x + 8 = 4x - 6$	$\mathbb{Q}$
$x^2 + 4x - 4 = 0$	$\mathbb{R}$
$7x - 4 = 2x + 4$	$\mathbb{N}$

a. Verifica que la solución de cada ecuación pertenece al conjunto correspondiente. En caso de que este último no contenga la solución, indica todos los conjuntos a los que pertenece.

b. De acuerdo con la ecuación $x^2 - 7 = 0$, ¿Por qué es incorrecto afirmar que sus soluciones pertenecen al conjunto de los números racionales?

Actividad Nº3

Resuelve las ecuaciones hasta identificar el factor $\sqrt{-1}$. Guíate por el ejemplo

a. $x^2 + x + 1 = 0$
b. $x^2 - 3x + 3 = 0$
c. $2x^2 - 2x + 5 = 0$

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$x^2 + 60 + 4 = 0$ $x^2 + 60 = -4$ $x^2 = -4 - 60$ $x^2 = -64$ $x = \pm\sqrt{-64}$ $x = \pm\sqrt{64} \cdot \sqrt{-1}$ $x = \pm 8 \cdot \sqrt{-1}$	$x^2 - 2x + 5 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$ $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2}$ $x = \frac{2 \pm 4 \cdot \sqrt{-1}}{2}$ $x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$

¿Qué relación hay entre el factor $\sqrt{-1}$ y que las ecuaciones no tengan solución en el conjunto de los números reales? Argumenta tu respuesta.

Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Ítem III: Identificar Potencias Imaginarias

OA1: Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

Definición Nº2: Potencias Imaginarias

De acuerdo a la definición principal

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

Se concluye lo siguiente:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$
…
..

Asi pues, forman una sucesión periódica, pues los valores de las cuatro primeras potencias que son 1 , i , -1 , $-i$

Los resultados se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente en 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

Por tanto:

$i^{4k} = 1$	Si el resto es 0
$i^{4k+1} = i$	Si el resto es 1
$i^{4k+2} = -1$	Si el resto es 2
$i^{4k+3} = -i$	Si el resto es 3

Ejemplo 1:

Determinar el resultado de i^{18}

Usando la definición 2, solo tomamos el exponente y la dividimos por 4 (pues cada 4 valores se repite el mismo resultado)

$$18 : 4 = 4$$
$$2$$

Entonces,

$$i^{18} = i^{4\cdot 4+2} = (i^4)^4 \cdot i^2$$
$$= 1^4 \cdot -1$$
$$= -1$$

En resumen, si solo tomamos el resto:

$$como\ el\ resto\ es\ 2, el\ resultado\ será - 1$$

Ejemplo 2:

Determinar el resultado de i^{95}

$$95 : 4 = 23$$
$$3$$

Como el resto es 3,

$$i^{95} = -i$$

Actividad Nº1

Analicen las siguientes potencias. Luego, responde

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^4 \cdot i^5 = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$	$i^{10} = i^4 \cdot i^6 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$	$i^{11} = i^4 \cdot i^7 = 1 \cdot (-i) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$	$i^{12} = i^4 \cdot i^8 = 1 \cdot 1 = 1$

a. ¿Qué regularidad observan en sus potencias? Explique.

b. ¿Qué valor tendrá la potencia i^{16}?, ¿y la potencia i^{25}?

Observación

¿Qué pasa en el caso de tener una potencia negativa?

Si queremos calcular i^{-n} solo debemos escribirlo de la siguiente manera

$$i^{-n} = \frac{1}{i^n}.$$

Entonces resolvemos el denominador como se ha explicado para potencias positivas de i y luego se vuelve a escribir en el denominador.

Ejemplo

Determinar el resultado de i^{-89}

Por eso calcularemos primero i^{89}. Mediante el procedimiento anterior, si calculamos la división de 89 entre 4 obtenemos $89 = 4 \cdot 22 + 1$, por lo que el resto es 1. Así tenemos:

$$i^{89} = i^1 = i$$

Una vez tenemos esto, reescribimos lo que estábamos buscando y obtenemos:

$$i^{-89} = \frac{1}{i^{89}} = \frac{1}{i}$$

Actividad Nº2

Determina las siguientes potencias de la unidad imaginaria

a. $i^{10} =$
b. $i^{103} =$
c. $i^{39} =$
d. $i^{45} =$
e. $i^{36} + i^{12} =$
f. $i^{68} =$
g. $i^{17} =$
h. $i^{24} =$
i. $3 \cdot i^{16} =$
j. $5 \cdot i^{16} =$
k. $3 \cdot 2i^{36} =$
l. $3 \cdot 4i^{36} =$

Tercer año de Enseñanza Media
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº1

Ítem IV: Las Aplicaciones de los números complejos

OA1: Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

Actividad

¿Qué haremos? Elaborar un afiche con las aplicaciones de los números complejos

Planifiquemos

Paso 1: Escojan una de las aplicaciones de los números complejos que se muestran al lado

Paso 2: Investiguen en Internet acerca de la aplicación escogida. Recuerden utilizar sitios Webs que entreguen información confiable. Para realizar la investigación, guíate por las siguientes preguntas:

- ¿En qué consiste la aplicación que escogieron?
- ¿En qué situaciones se observan?
- ¿Cómo se relaciona la aplicación que escogieron con los números complejos? Explique
- ¿Cuál es el impacto en la realidad de la aplicación?

Ejecutemos

Paso 3: Establezcan la manera en que elaboraran su afiche y los recursos que necesitaran (soporte digital, materiales concretos, etc.)para el diseño de su afiche, consideren las siguientes secciones:

- Título que llame la atención
- Explicación simple y clara de la aplicación.
- Fotografías o dibujos de apoyo
- Conexión de la aplicación con la matemática

Presentación

Paso 4: Den a conocer su trabajo al curso. Pueden compartirlo en sus redes sociales.

Realicen una discusión a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la importancia de la matemática frente a diversos fenómenos presente en la realidad?
- ¿Qué es lo que más te llamo la atención de la aplicación investigada?

1.Fractales
2.Circuitos de corriente alterna
3. Aerodinamica

Se solicita evidencia fotográfica del trabajo realizado con fecha 2 Abril 2021.