Liceo Javiera Carrera
Dpto. Matemática
Prof. Angel Oteiza Soto

TERCEROS MEDIOS – LIMITE, DERIVADA E INTEGRAL

GUÍA 3 de Retorno

Nombre:_______________ 3º___ Fecha:________

Observación: LEE, ANALIZA Y RESUELVE.

EJEMPLO INDUCTIVO:

Archivo editorial

Antonio estaba revisando noticias en Internet y se distrajo con el informe del tiempo. El pronóstico para ese día, en la ciudad de Nueva York, era de 91 ºF, la temperatura máxima y 68 ºF, la temperatura mínima.

- Si la función que relaciona las escalas Celsius (ºC) y Fahrenheit (ºF) está dada por la expresión $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$, en grados Fahrenheit, ¿cuáles son las temperaturas mínima y máxima pronosticadas, en grados Celsius?
- Las personas que viven en Nueva York, ¿deberán usar ropa abrigada ese día?, ¿por qué?
- ¿En qué países se utiliza la escala Fahrenheit de temperatura? Averigua.
- ¿Qué otras escalas de temperaturas conoces? Nómbralas.

En la situación inicial observaste que si tenemos una función $y = f(x)$ a veces necesitamos calcular el valor de la variable independiente x, la cual tenemos que despejar; por ejemplo, la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar corresponde a 212 °F. Si quisiéramos transformar esta medida a grados Celsius, podemos escribir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32$$

Luego, despejamos la x, es decir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32 \quad \text{Restamos 32.}$$

$$180 = \frac{9}{5}x \quad \text{Multiplicamos por } \frac{5}{9}.$$

$$100 = x$$

Por lo tanto, el agua ebulle a 100 °C.

Podemos generalizar lo anterior considerando una función que relacione la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura en grados Fahrenheit. Para esto debemos expresar x en función de y (o $f(x)$), es decir, despejaremos la variable x de la expresión original:

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \quad \text{Restamos 32.}$$

$$y - 32 = \frac{9}{5}x \quad \text{Multiplicamos por 5.}$$

$$5(y - 32) = 9x \quad \text{Dividimos por 9.}$$

$$\frac{5}{9}(y - 32) = x$$

La expresión obtenida en el procedimiento anterior se conoce como la función inversa de f y se escribe como f^{-1}. En este caso:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Escribimos la expresión anterior en términos de x. Luego, tenemos, por ejemplo, que:

$$f^{-1}(212) = \frac{5}{9}(212 - 32) = \frac{5}{9}(180) = 100$$

El resultado anterior es igual al que obtuvimos en la página anterior, es decir, que 212 °F equivalen a 100 °C.

OBSERVACIÓN:

Atención

Con frecuencia se representa la inversa de una función f mediante f^{-1}.

Esta notación no debe confundirse con un exponente negativo. Es decir,

$f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$

pues $[f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$

La expresión obtenida en el procedimiento anterior se conoce como la función inversa de f y se escribe como f^{-1}. En este caso:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Escribimos la expresión anterior en términos de x. Luego, tenemos, por ejemplo, que:

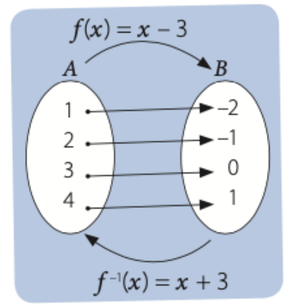
$$f^{-1}(212) = \frac{5}{9}(212 - 32) = \frac{5}{9}(180) = 100$$

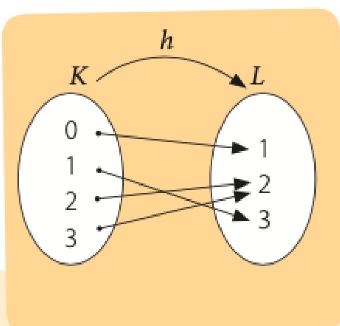
El resultado anterior es igual al que obtuvimos en la página anterior, es decir, que 212 °F equivalen a 100 °C.

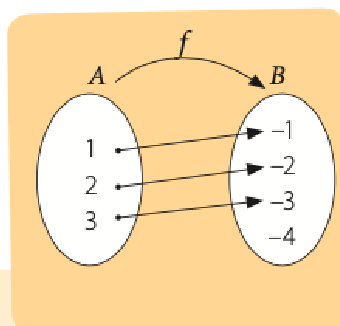
En el diagrama sagital de la derecha se representa una función f y su inversa f^{-1}. Si te fijas, el dominio de f equivale al recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1}.

Además, para que f^{-1} sea función, a cada elemento de B le corresponde una única preimagen, de manera que f debe ser una función biyectiva.

Por lo tanto, no todas las funciones tienen una inversa, es decir, solo tienen inversa aquellas funciones que son biyectivas.







En el diagrama anterior h no es inyectiva ya que $h(2) = h(3) = 2$. Luego, h^{-1} no es función pues un elemento de su dominio tiene dos imágenes (2 y 3).

En el diagrama anterior f no es sobreyectiva ya que −4 no tiene preimagen. Luego, f^{-1} no es función pues no todos los elementos de su dominio tienen una imagen.

Por otra parte, si calculamos la composición $(f \circ f^{-1})(x)$, o bien, $(f^{-1} \circ f)(x)$, obtendremos la función identidad $f(x) = x$, de esta manera podemos determinar si cierta función es la inversa de otra; por ejemplo, más arriba concluimos que:

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \qquad f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$, tenemos:

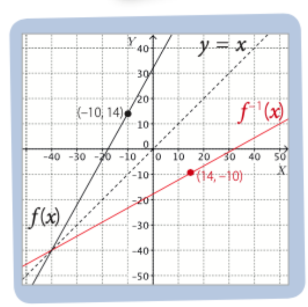
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = \frac{45}{45}(x - 32) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

Como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, la función $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ es la inversa de $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$ (representada con las líneas punteadas). Esto ocurre para todas las funciones y sus inversas. En otras palabras, si f es una función biyectiva y f^{-1} es su función inversa, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la gráfica de la función $f(x) = x$.

¿Lo entiendes?

Determina $(f^{-1} \circ f)(x)$ y verifica que f^{-1} es la inversa de f.



EJEMPLOS:

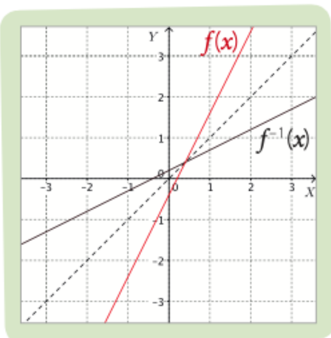
¿Cómo hacerlo?

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1}.

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f\,(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$.



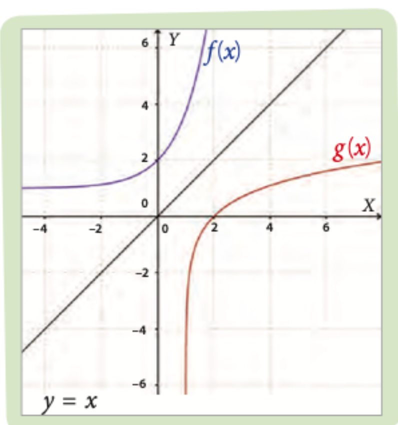
$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$ ······ Restamos $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5}$ ······ Multiplicamos por 2.

$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$

Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.



¿Cómo hacerlo?

Construye la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = ln(x - 1)$. Luego, verifica que g es la inversa de f.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de las funciones f y g. Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, de modo que podemos suponer que g es la inversa de f.

Para verificar lo anterior podemos calcular $(g \circ f)(x)$. Observa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = ln((e^x + 1) - 1) = ln(e^x) = x \cdot ln(e) = x$$

Luego, como $(g \circ f)(x) = x$, la función g es la inversa de f.

RESUMEN

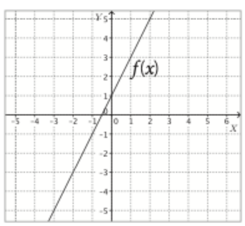
Tomo nota

- Dada una función $f: A \longrightarrow B$ biyectiva, llamamos función inversa de f a la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que para cualquier a del dominio y b del recorrido de f se cumple que: Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.
- Dada una función f y su función inversa f^{-1}, se cumplen: $dom\, f = rec\, f^{-1}$ y $rec\, f = dom\, f^{-1}$.
- Dada una función f y su función inversa f^{-1}, se cumple que: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.
- Dada una función $f(x)$, para determinar la representación algebraica de $f^{-1}(x)$, su función inversa, se escribe la ecuación $(f \circ f^{-1})(x) = x$, aplicando $f(x)$ a la expresión $f^{-1}(x)$, y luego se resuelve la ecuación, considerando a $f^{-1}(x)$ como la incógnita.

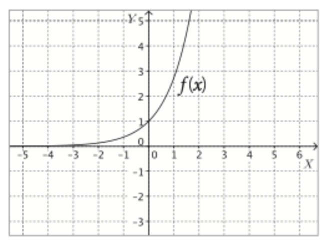
EJERCICIOS

1. A partir de la gráfica de f, determina si existe la inversa f^{-1}. Luego, traza su gráfica.

a.



b.



2. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué condición debe cumplir una función para tener una función inversa?

b. Si f es creciente, ¿es f^{-1} una función creciente?

3. Determina si las siguientes funciones, definidas en los números reales, tienen inversa. En el caso de que la tengan, determina f^{-1}.

a. $f(x) = 3x + 4$

b. $f(x) = 2x^3 - 1$

c. $f(x) = x^2 - 4$

d. $f(x) = log(x - 5)$

e. $f(x) = 1 - e^x$

f. $f(x) = x^6 - 4$

Desafío

Dada la función $f(x) = mx + n$, ¿cuál es el valor de $m \cdot p$, si p es la pendiente de la recta asociada a f^{-1}?

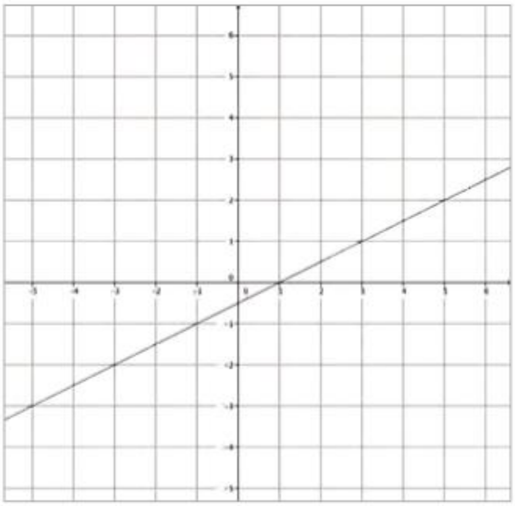
4. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▶ **El precio de un automóvil se puede modelar por la función $p(t) = 30\,000\,000 - 2\,000\,000t$, donde p corresponde al precio del automóvil en el año t.**
   a. Demuestra que p es una función biyectiva.
   b. Halla p^{-1} y determina su significado.

5. **Al colocar un objeto en el platillo de una balanza analógica, el puntero describe un arco de medida, en grados, directamente proporcional a la masa del cuerpo. Para 1 kg el puntero describe un arco de 36°.**
   a. Escribe una función que modele el desplazamiento del puntero en función de la masa corporal x de un objeto, con $x < 10$.
   b. Escribe una función que modele la masa, en kilogramos, de un objeto colocado en la balanza, en función del desplazamiento x del puntero, con $x < 360°$.
   c. ¿Cuál es la relación entre las funciones obtenidas en los puntos anteriores?

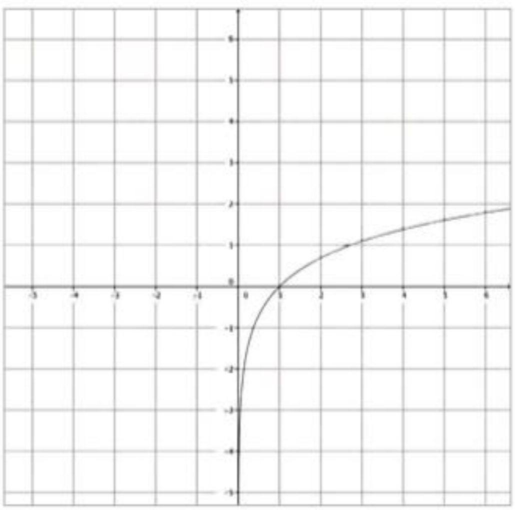
6. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ **La ley de enfriamiento de Newton relaciona la temperatura de un objeto y la temperatura del medio en el que se encuentra, según el tiempo transcurrido. Así, podemos calcular cuánto tiempo demora en enfriarse un café con la función $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)(0{,}95)^t$, donde T_0 es la temperatura ambiente, T_1 la temperatura inicial del café y $T(t)$ es la temperatura del café en términos del tiempo t.**
   a. Determina T^{-1} y explica su significado.
   b. Si $T_0 = 21$ °C, $T_1 = 90$ °C y $T = 45$ °C, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que el café fue servido?

SOLUCIONARIO

1. a.



b.



2. a. La función debe ser biyectiva.
   b. Sí.

3. a. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$
   b. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$
   c. No tiene inversa.
   d. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = 10^{x} + 5$
   e. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = ln(1 - x)$
   f. No tiene inversa.

4. a. p es inyectiva, ya que:

$$p(t_1) = p(t_2)$$
$$30000000 - 2000000t_1 = 30000000 - 2000000t_2$$
$$-2000000t_1 = -2000000t_2$$
$$t_1 = t_2$$

p es sobreyectiva, porque es una función lineal, luego, p es biyectiva.

b. $p^{-1}(t) = \dfrac{30\,000\,000 - t}{2\,000\,000}$.

Se puede interpretar como estimar los años de un automóvil, si se conoce su precio.

5. a. $f(x) = 36x$

b. $g(x) = \dfrac{x}{36}$

c. f y g son funciones inversas.

6. a. $T^{-1}(t) = \dfrac{1}{ln\, 0{,}95} \cdot ln\left(\dfrac{y - T_0}{T_1 - T_0}\right)$

b. 23 minutos y 30 segundos, aproximadamente.