Cuarto año de Enseñanza media 2020
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Guía Nº3: Propiedades de las Funciones

Nombre: ______________________________ Curso__________ Fecha: ___________

Aprendizaje Esperado Nº1

Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia.

Objetivo de Guía

Identificar funciones inyectivas, sobreyectiva y biyectiva

Instrucciones:

1. **La siguiente es una guía de contenido relacionada a Funciones,**
   - **Se exige escribir cada definición en tu cuaderno**
   - **Debes resolver en tu cuaderno**

2. **Toda duda o consulta se debe informar al mail** profesora.carolina.salort@gmail.com **la cual será respondida a la brevedad**

3. **Todo avance como evidencia fotográfica debe ser enviado al mail** profesora.carolina.salort@gmail.com**, con el asusto " Avance Guía de aprendizaje Nº3: propiedades de las funciones"**

4. **Puedes apoyar tu estudios con el link** https://www.youtube.com/watch?v=-9sJnBLJxKI

   " Funciones Inyectivas Sobreyectivas y Biyectiva"

El optimismo es la fe que guía al logro. Nada se puede hacer sin esperanza y confianza (Helen Keller)

Funciones y sus propiedades

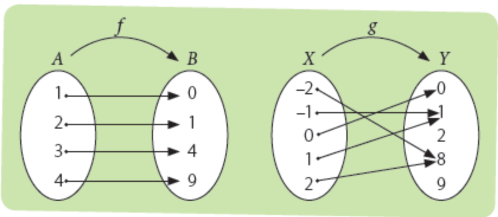
Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación. En esta oportunidad estudiaremos ***Función Inyectiva***, ***Función Sobreyectiva*** y ***Función Biyectiva***

Función Inyectiva

Una ***función f*** es ***Inyectiva*** o ***uno a uno*** si se cumple que cuando:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ entonces } x_1 = x_2$$

Es decir, si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Dicho de otra manera, ningún elemento del recorrido es imagen de dos preimagen diferentes. Por ejemplo, sean las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: X \rightarrow Y$, dos funciones cuyo representación mediante diagrama sagital es la siguiente:



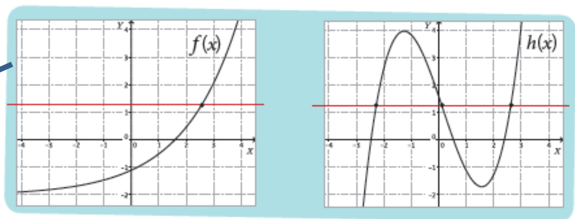
Tenemos que la función $f: A \rightarrow B$ es Inyectiva porque las imágenes de cada elemento son diferentes

En cambio la función $g: X \rightarrow Y$ no es Inyectiva porque $g(-1) = 1$, es decir, -1 y 1 tienen la misma imagen

Test de la recta horizontal

Para determinar si la función es inyectiva, resulta útil construir su representación gráfica y luego realizar un **test de la recta horizontal**, que consiste en trazar rectas horizontales que intersequen a la gráfica, si la recta corta la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva. En cambio si la recta interseca a la gráfica en más puntos, la función no es inyectiva.

Por ejemplo observemos las gráficas de las funciones f y h



La función f es inyectiva, ya que toda la línea horizontal corta la recta en un solo punto

La función h, no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica en 3 punto.

El optimismo es la fe que guía al logro. Nada se puede hacer sin esperanza y confianza (Helen Keller)

Cuarto año de Enseñanza media 2020
Departamento de matemática
Profesora Carolina Salort

Ejemplo Nº1

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{g(x) = 3x - 1.}$

Determine si f y g son inyectivas

Paso 1: Evaluemos las funciones

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

x	$(x)^2$	y
-2	$(-2)^2$	4
-1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4

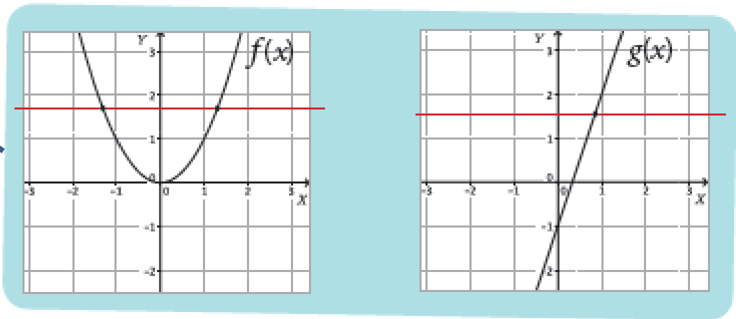
$\boldsymbol{g(x) = 3x - 1.}$

x	$3(x) - 1.$	y
-2	$3(-2) - 1.$	-7
-1	$3(-1) - 1.$	-4
0	$3(0) - 1.$	-1
1	$3(1) - 1.$	2
2	$3(2) - 1.$	5

Paso 2: Al graficar las funciones f y g nos queda:

En $f(x)$, la recta horizontal interseca la curva en 2 puntos,

Por lo tanto la función NO es biyectiva



En $g(x)$, cualquier recta horizontal interseca la gráfica en 1 solo punto.

Luego g es biyectiva

Actividad Nº1

Identifica si las siguientes funciones son inyectivas o no.

a. $f(x) = x - 1$

b. $g(x) = x^2 - 2$

c. $h(x) = \sqrt{x + 2}$

d. $i(x) = x^4 + x$

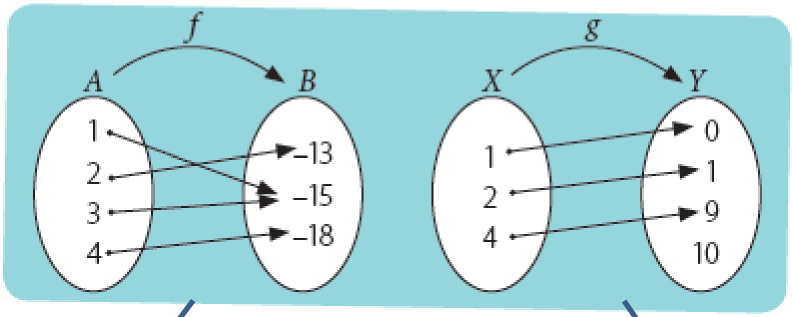
El optimismo es la fe que guía al logro. Nada se puede hacer sin esperanza y confianza (Helen Keller)

Función Sobreyectiva

Una ***función f*** es ***sobreyectiva*** cuando:

$$Rec(f) = B$$

Es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio. Por ejemplo, en las funciones cuyas representaciones sagitales están representadas a continuación tenemos que $f: A \to B$ y $g: X \to Y$.

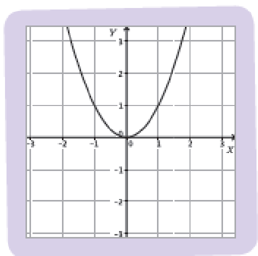


Tenemos que la función $f: A \to B$ es una función sobreyectiva ya que $Rec(f) = B$.

En cambio la función $g: X \to Y$ no es sobreyectiva ya que hay elementos de llegada que no son imagen de ningún número, en este caso el 10

Ejemplo Nº2

Determina si la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ es sobreyectiva

Paso 1. Evaluamos	***Paso 2:*** Graficamos	***Paso 3:*** Analizamos
(tabla abajo)		En la gráfica de f, tenemos que los valores que toma y son todos los numero reales positivos $\mathbb{R}^+$ y el 0. Luego como el codominio de la función es el conjunto de los números reales, tenemos que $Rec(f) \neq \mathbb{R}_0^+$ Por lo tanto, la función no es sobreyectiva

x	$(x)^2$	y
-2	$(-2)^2$	4
-1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4

¿Cómo hacer la función Sobreyectiva?

Se ***redefine el codominio*** de la función de modo que f sea una función sobreyectiva

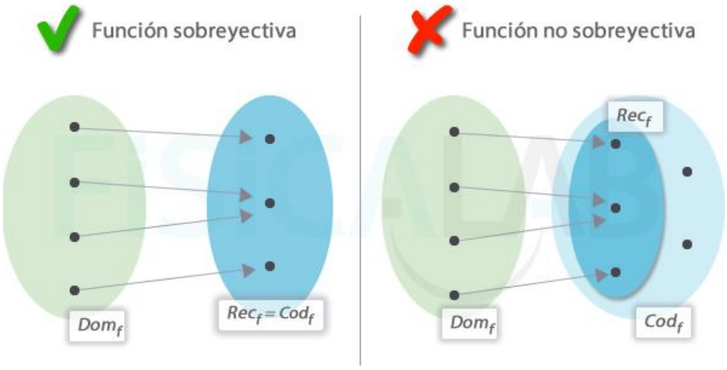
En el ejemplo anterior observamos que el $Rec(f) \neq \mathbb{R}_0^+$

Por lo tanto, si el codominio es el conjunto $\mathbb{R}_0^+$, entonces la función es sobreyectiva

Luego, podemos definir f como:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$

En este caso la función $f(x) = x^2$es sobreyectiva pues $rec\ (f) = codom\ (f) = \mathbb{R}_0^+$



Actividad Nº2

Determina cuál de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son sobreyectivas.

a. $f(x) = 5(x - 6)$

b. $g(x) = 2(x + 1)$

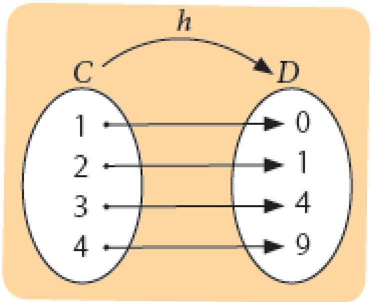
c. $h(x) = \log x$

d. $i(x) = \sqrt[3]{3x}$

Función Biyectiva

Una ***función*** f es ***biyectiva*** si es ***inyectiva y sobreyectiva*** a la vez.

Es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del codominio son imagen de solo un elemento del dominio; por ejemplo, sea la función $h: C \rightarrow D$ cuya representación es la siguiente:



Se tiene que la función h es biyectiva porque cada elemento del codominio D es imagen de solo un elemento del dominio C, es decir, h es inyectiva y sobreyectiva.

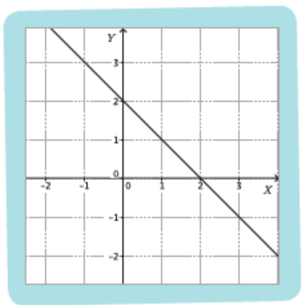
Ejemplo Nº3

Determina si la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2 - x$ es biyectiva

Paso 1. Evaluamos

x	$2 - x$	y
-2	$2-(-2)$	4
-1	$2-(-1)$	3
0	$2-0$	2
1	$2-1$	1
2	$2-2$	0

Paso 2: Graficamos



Paso 3: Analizamos

Para saber si la función es biyectiva debemos verificar que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez

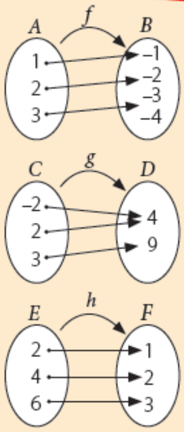
1. Si te fijas cualquier recta horizontal intersecta a la gráfica de la función en un solo punto. Por lo tanto la función es inyectiva
2. Por otro lado, a partir de la gráfica también podemos concluir que el recorrido de la función son todos los números reales, de modo que el recorrido es igual que el codominio, por lo tanto, la función es sobreyectiva
3. Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva

El optimismo es la fe que guía al logro. Nada se puede hacer sin esperanza y confianza (Helen Keller)

En Resumen

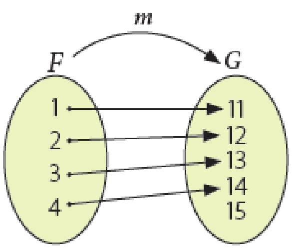
Tomo nota

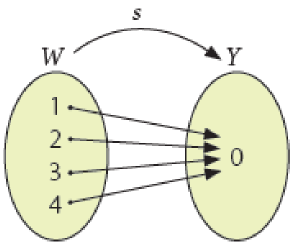
- Una función es **inyectiva** si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Por ejemplo, la función $f: A \longrightarrow B$ representada en el diagrama sagital es inyectiva ya que todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes.
- Una función es **sobreyectiva** si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Por ejemplo, la función $g: C \longrightarrow D$ representada en el diagrama sagital es sobreyectiva ya que todo elemento del codominio D tiene al menos una preimagen.
- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen. Por ejemplo, en la función $h: E \longrightarrow F$ representada en el diagrama sagital, a cada elemento de codominio F le corresponde una única preimagen.

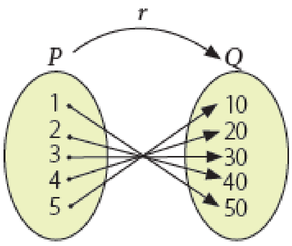


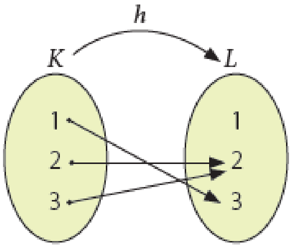
Actividad

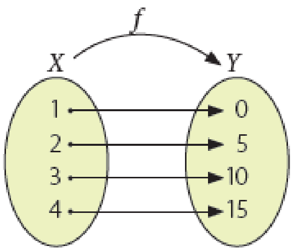
1. Determina si la función dada es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifica tu respuesta

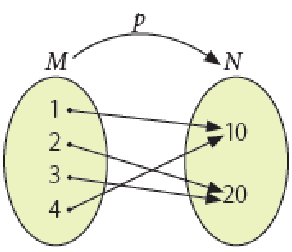
a.


c.


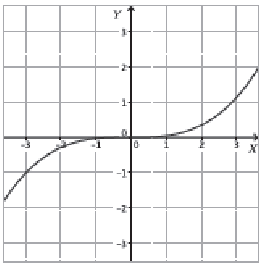
e.


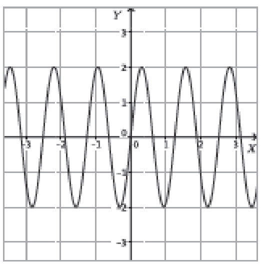
b.


d.


f.


2. Determina si las siguientes funciones son inyectivas o no. Justifica tu respuesta

a.


b.


c.